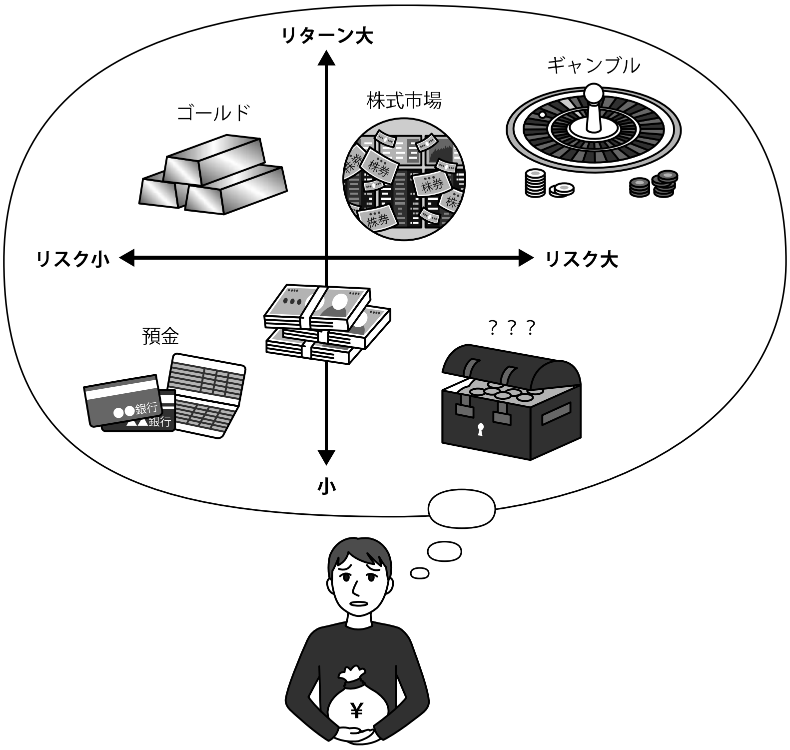


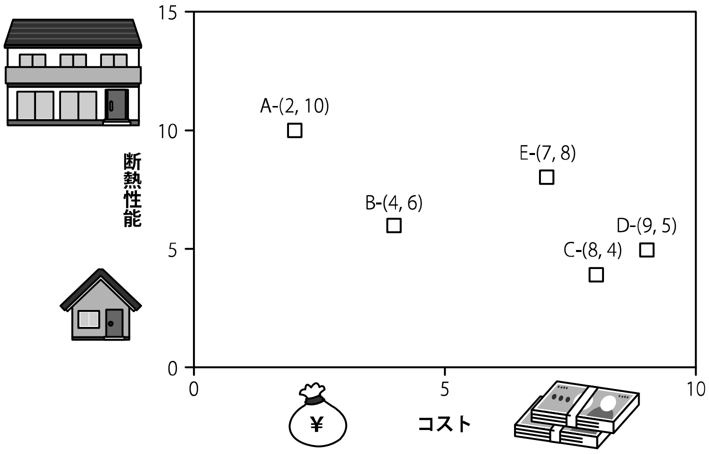
■図 5.17：リターン対リスク

ここで次のような例を考えてみましょう。あなたは家の購入を考えています。家の中では快適に過ごしたいので、断熱性能ができるだけ良いものを探します。断熱性能を良くするには、工法の違い、気密性を上げる、断熱材を変えるなどさまざまな方法があります。これらには各々異なるコストが伴います。また断熱性能も対拠法によって異なるでしょう。今、五つの家のタイプ（A、B、C、D、E）があったとして、各々のコストと断熱性能が以下のようになったとします。

$$A = (2, 10)$$
$$B = (4, 6)$$
$$C = (8, 4)$$
$$D = (9, 5)$$
$$E = (7, 8)$$

ここで第 1 番目の要素がコスト、2 番目の要素が断熱性能*16です。これらを**図 5.18** にプロットしました。当然ながら、ここでの目的はコストと断熱性能をともに最小化することです。しかし、この二つを同様に最小化できるとは限りません。つまり、二つの目的を同時に最適化できるわけではないのです。

このような場合に役立つ考え方が、パレート最適性です。ある発生事象がパレート最適解となるのは、すべての評価関数（適合度関数）に対して、それと同程度にあるいはそれ以上に好ましい発生事象が他に存在しない場合です。



■ 図 5.18：コスト vs. 断熱性能

では前の図をもとに考えてみましょう。ここでは左下の点ほど望ましいことに注意してください。特に A、B、C が良い候補であるように思わます。これら三つの候補はどれも両方の次元（効用の評価）に対して最良ではありませんが、逆にすべての評価で自分より優れた候補はありません。このような点は、“優越されていない” と言われます。一方 D、E は劣っています。これは他の点に “優越されている” からです。E は B に優越されています。なぜなら

B のコスト（4）＜ E のコスト（7）

B の断熱性能（6）＜ E の断熱性能（8）

*16　Q 値（1.2 節の Q 値とは異なる）や C 値などで数値化される。小さいほど良い。

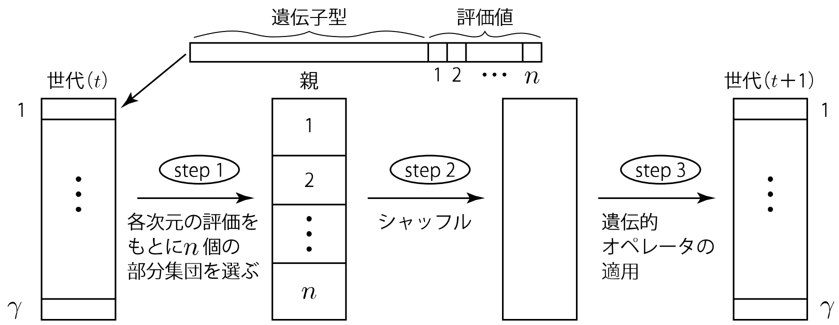
となり、E よりも B の方が両方の評価で良いからです。D もまた C に優越されています。このように考えるとパレート最適なものは A、B、C となります。パレート最適という考え方は、候補集合から唯一の候補を選び出すのには使えません。つまり A、B、C の中のどれが良いかについては結論できません。

より形式的にパレート最適性を定義すると次のようになります。二つの点 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ と $y = (y_1, \ldots, y_n)$ が n 次元空間にあるとしましょう。ここでは n 次元空間の各次元がそれぞれ効用（目標）関数を表しています。これらをできるだけ最小化するというのが目的です。このとき x が y に優越する（$x <_p y$ と書く）とは、

$$x <_p y \Longleftrightarrow (\forall i)(x_i \leq y_i) \wedge (\exists i)(x_i < y_i) \tag{5.16}$$

と定義されます。以下では n（異なる効用関数の数）のことを評価の次元数と呼びます。また、他の点に優越されていない点のことを非優越ということもあります。なお、パレート最適解集合により形成される曲線（曲面）のことをパレートフロントと呼びます。

この考えに基づいて、創発現象を多目的最適化に適用することができます。以下では Schaffer らによる VEGA（Vector Evaluated Genetic Algorithm）と呼ばれるシステムに基づいて説明しましょう **[136, 137]**。VEGA での選択は次のように行われます（**図 5.19** 参照）。ここで評価の次元数（異なる効用関数の数）を n とします。集団全体の数は γ です。



■図 5.19：VEGA の選択方法

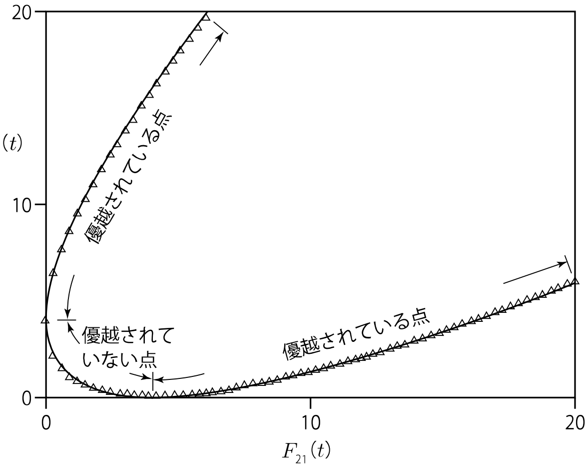
1. n 個の部分集合を Sub_i（$i = 1, \ldots, n$）とする。
2. Sub_i には i 番目の評価関数のみを用いて選択した個体を保持する。
3. $Sub_1, Sub_2, \ldots, Sub_n$ を混ぜてシャッフルする。
4. これらの集合に遺伝的オペレータを作用して次世代の子孫をつくり出す。

選択は評価関数ごと（各次元の関数値ごと）に行われていることに注意してください。一方、生殖は部分集団ごとではなく全体で行われます。つまり Sub_i と Sub_j（$i \neq j$）内の個体での交叉も行われます。この方法によって各次元で優れた個体を守ると同時に、一つ以上の次元で平均より優れた個体を選択するようにします。

ではここで VEGA による創発を見てみましょう。次のような二つの効用関数の最適化を考えます。

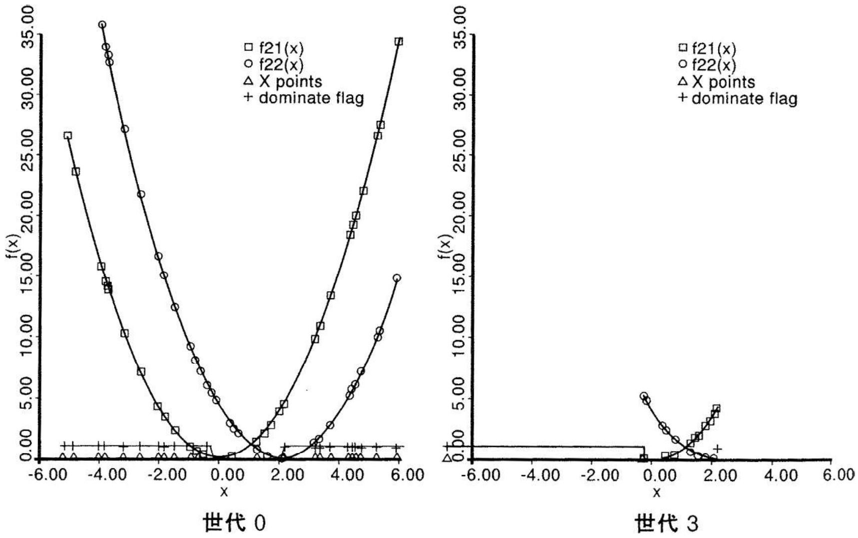
$$F_{21}(t) = t^2$$
$$F_{22}(t) = (t-2)^2$$

ただし、t は唯一の独立変数です。この関数の様子が**図 5.20** に示されています（これをパレート図と呼びます）。VEGA の目標は、図に示したような優越されない点を選び出すことです。



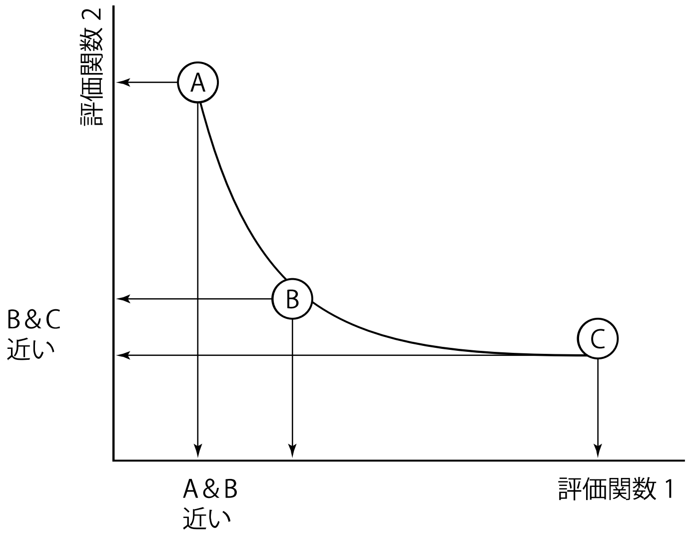
■ 図 5.20：パレート図

図 5.21 に、世代 0 と世代 3 での VEGA の結果を示します。ここでは各次元が 30 個体となるように集団数を設定し、交叉率 0.95、突然変異率 0.01 としました。VEGA による創発は優越されない点の前面（パレートフロント）をうまく見出しています。しかしながらいくつかの中間点は見失っているようです。

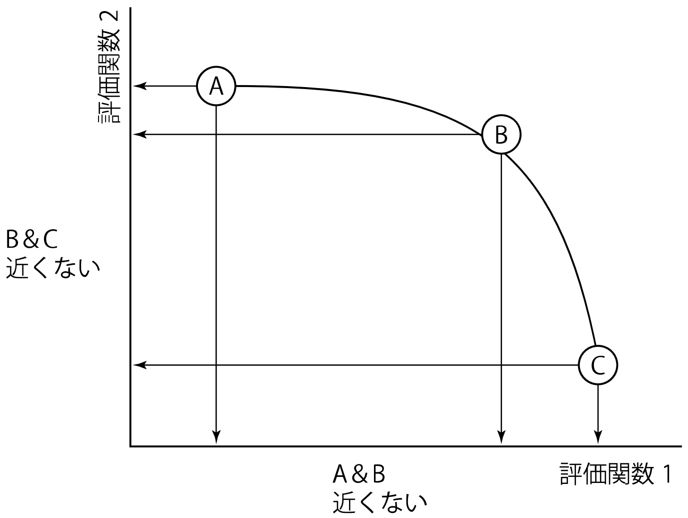


■ 図 5.21：多目的最適化の結果

上の例で見られるように、VEGA の選択には次のような問題があります。淘汰圧は少なくとも一つの次元（評価関数）での極値（**図 5.22** の A と C）を好むように働きます。もしもユートピア個体（すべての次元で優れている個体）が存在するなら、一つの次元のみで優れた親に対する遺伝子作用によってそれを見出せるかもしれません。しかしながら、こうしたユートピア個体は多くの問題で存在しません。このようなときはパレート最適な点を求めることになりますが、このうちのある点はすべての次元で中間となっています（図 5.22 の B）。理想的な GA では、このどちらも、つまり図 5.22 の A、B、C ともに、同じような淘汰圧がかかるのが望ましくなります。ところが、実際には B のような中間の点は VEGA の選択では生き残れません。結果的に、集団内で各次元に特化して優れた「種」が分化するようになります。こうした危険は、パレート最適部分が凹よりも凸である場合により顕著です（図 5.22 を参照）。



（a）凹



（b）凸

■ 図 5.22：パレート最適化部分の凹凸