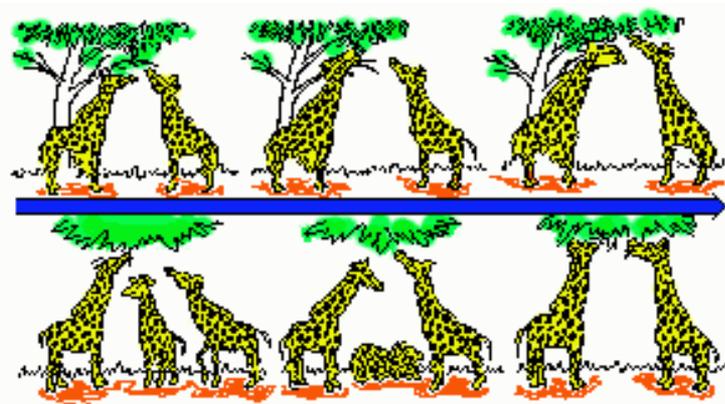


論理とAI

東京大学大学院
情報理工学系科学研究科
電気情報学専攻
伊庭齐志



LLM の盲点: 確率的なオウム

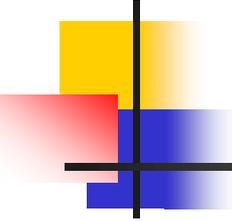


- 算数ができない
 - 9x9の演算はOK
 - 連立方程式？
- 論理的思考が苦手
 - 三段論法、背理法？
 - 経験でのみできるか？
- 生得的な知能はあるのか？
 - 人間などは進化の産物
 - 準備された学習
 - 遺伝子に組み込まれた学習の本能

AIと論理

- 論理はAIにどのくらい必要か？
- 論理万能主義
 - 計算機で処理可能な形式的知識の記述
 - Prolog, 第五世代コンピュータ
 - 2度目の冬
- 論理否定派
 - Johnson-Laird: 「メンタルモデル」
 - 人間は3段論法すら満足にできない





非形式的論理

- 非單調論理
- 幾何學的推論
- ファジィ論理
- 確率的推論

非單調論理

Tweety is a bird.



~~Tweety~~ can fly.



Tweety is a penguin.



Tweety is cannot fly.



Non-monotonic logic

- オペレータ M

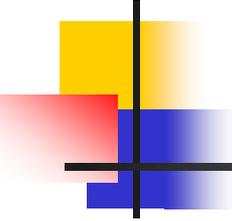
$$M_p \equiv \text{UNLESS}(\neg p)$$

- $\forall x \text{ Bird}(x) \wedge M_{\text{Fly}(x)} \rightarrow \text{Fly}(x)$

- Soundness 健全性

- Completeness 完全性

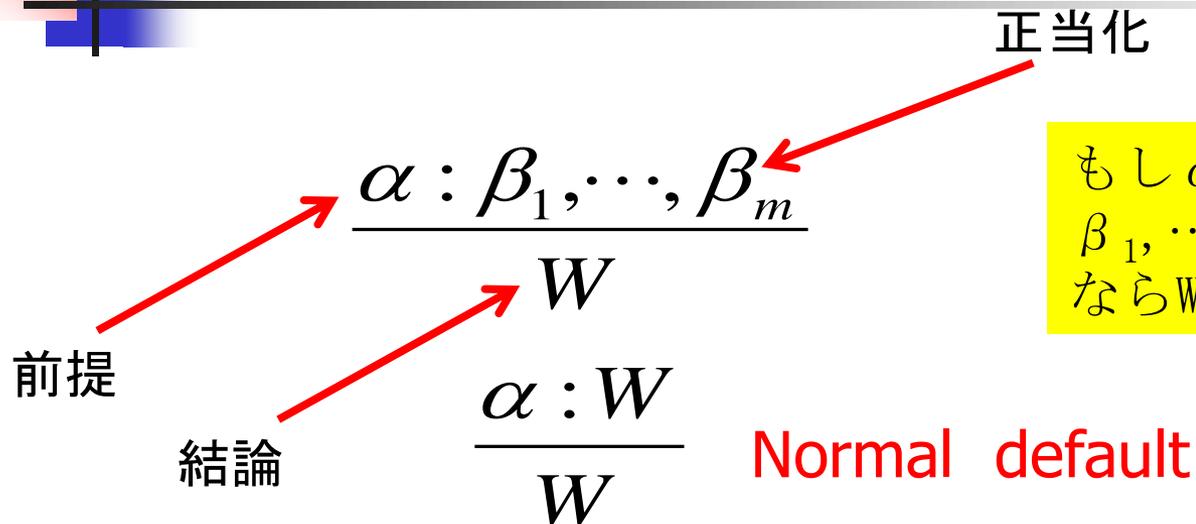




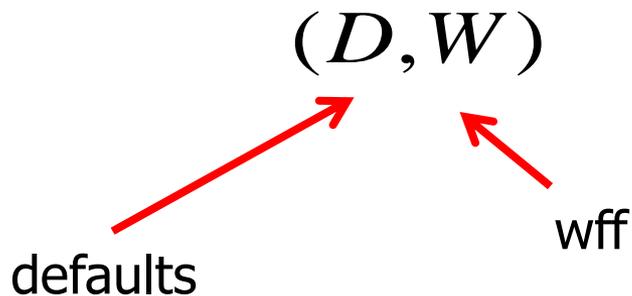
Non-monotonic logicの不動点

- $NM_A(S) = S$ となる S
 - 無矛盾な可能世界
- 例1: 一階述語の公理と $\{M_C \supset \neg D, M_D \supset \neg C\}$
 - 2つの不動点
 - $\neg C$ を含むもの
 - $\neg D$ を含むもの
- 例2: 一階述語の公理と $\{M_C \supset \neg C\}$
 - 不動点がない

Default logic



もし α が真であり、
 β_1, \dots, β_m が信じられる
なら W は真である



Default logicの例

- Defaults

$$D = \left\{ \frac{Bird(X) : Fly(X)}{Fly(X)} \right\}$$



- 背景知識の例

$\{Bird(\text{コンドル}), Bird(\text{ペンギン}),$
 $\neg Fly(\text{ペンギン}), Fly(\text{鷹})\}$

Default logicの例

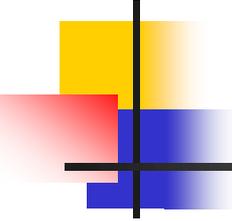
- Closed world assumption

- 閉世界仮説 . . . 知らないことは知らない

- What is not known to be true is believed to be false.

$$\frac{\vdash \neg F}{\neg F}$$

フレーム問題の解



幾何学的推論

- Geometric reasoning
- 幾何学の定理証明・推論を計算機で行う
- 通常のlogicではできない
 - なぜか？
- 応用例
 - CAD
 - ロボットのpath planning, vision
 - 計算幾何学

ロボットは東大に入れるか？

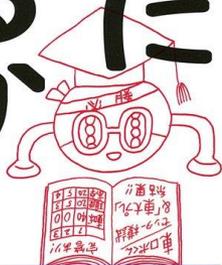
■ 人工頭脳プロジェクト

- 国立情報学研究所(NII)
- 2016年までに大学入試センター試験で高得点を

入れるか
東大に
ロボットは

る
に東京大学入試を突破することを目標

新井紀子



みんながわかる、
人工知能の最前線!
今後、「人間」に残される領域はどこか？
朝日新聞「天声人語」はじめ、各メディアで大注目の同名プロジェクトの全貌!
全国センター模試/東大入試アレ(代ゼミ)の結果も掲載! イースト・プレス 定価(本体1400円+税)

WEBRONZA

検索

WEBRONZAとは? RSS

政治・国際 経済・雇用 社会・メディア 科学・環境 文化・エンタメ スペシャル シノドス ブロガー Global

WEBRONZA+ > 科学・環境 > スペシャル > 記事

WEBRONZA+

政治・国際

経済・雇用

社会・メディア

科学・環境

文化・エンタメ

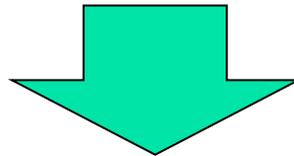
【科学朝日】最終回 ロボットは東大に入れるか？ 人工知能の挑戦(collaborate with 朝日ニュースター、3月22日放送)

2012年03月28日

Talking Arena 基礎科学 情報 朝日ニュースター 科学朝日 脳・認知科学

2005年 東京大学二次試験数学 (文系) 第3問

$$\exists s \exists t (s \geq 0 \wedge t \geq 0 \wedge s^2 + t^2 = 1 \wedge x^4 - 2(s+t)x^2 + (s-t)^2 = 0)$$

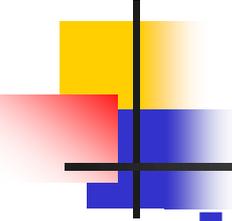


```
■ 東京大学 数学入試問題  
▼ 2005年 文 第3問  
> Problem_05_No3 :=  
  Ex([s, t], And(x^4-(2*(s+t))*x^2+(s-t)^2 = 0, s >= 0, t >= 0, s^2+t^2 = 1));  
Problem_05_No3 = Ex([s, t], And(x^4-2*(s+t)*x^2+(s-t)^2 = 0, 0 <= s, 0 <= t, s^2+t^2 = 1))  
> Ans1 := qe(Problem_05_No3);  
Ans1 := x^4 <= 8  
> solve(Ans1);  
RealRange(-2^(3/4), 2^(3/4))
```

図4 QE ソルバー SyNRAC 入力と実行結果 (2005 年度東京大学二次試験数学 (文系) 第3問)

“自然言語処理と計算第
数の接合に
よる数学問題
へのアプロ
ーチ”、相澤・松
崎・穴井

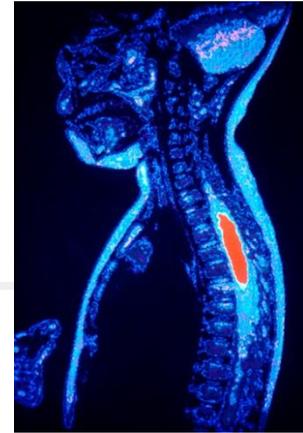
人工知能学
会誌、vol.27,
no.5, 2012.



幾何学的推論:古典的な例

- Thomas G. Evans: "A Program for the Solution of a Class of Geometric Analogy Intelligence Test-Questions", 1963.
- 幾何の類推 (analogy) を行う: 知能テストを解くことができる
- Evansの方法
 - 図形とその関係を記号表現に直す
 - 記号的な表現のマッチングを行う
 - 変換するルールを生成する

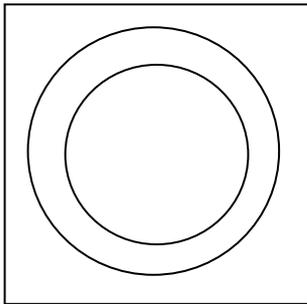
類推による推論の例



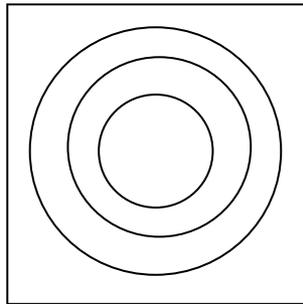
- 今、ここに肺ガンの患者がいるとしよう。ガンはかなり進んでいるけれども、患部に強い放射線をあてれば、転移せずに完治する可能性がある。しかし、患部は体の奥の方にあるので、外側から強い放射線をあてると、まわりの正常細胞まで破壊されてしまう。もしもあなたが医者だったとしたら、正常細胞を破壊せずにガンを放射線によって治療する方法として、どんな方法が考えられるか？

知能パズルの例(I)

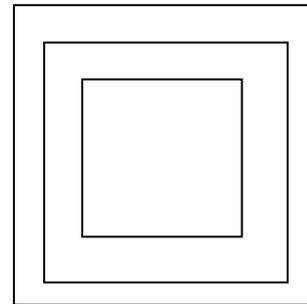
A



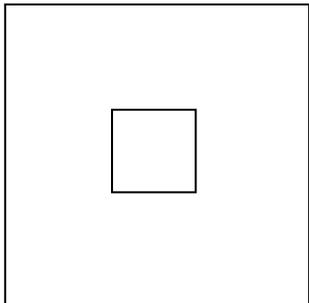
B



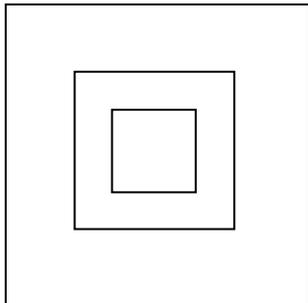
C



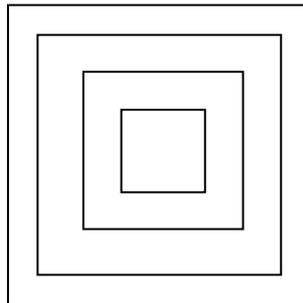
1



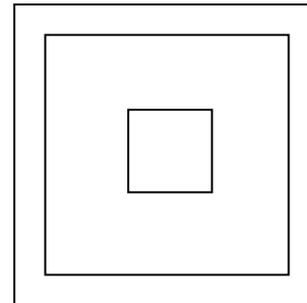
2



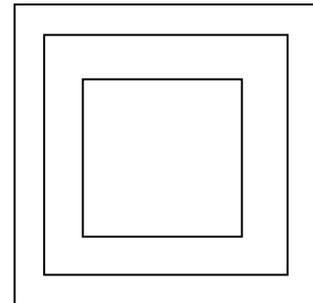
3



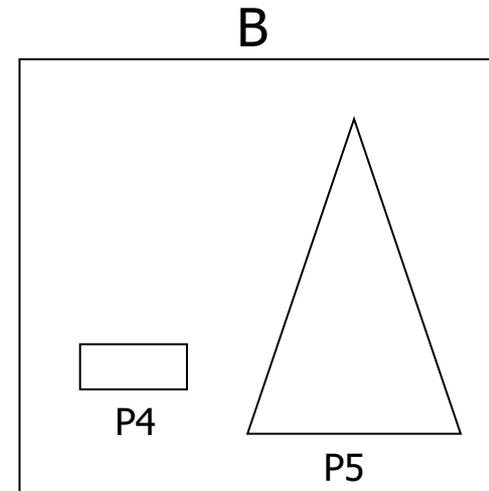
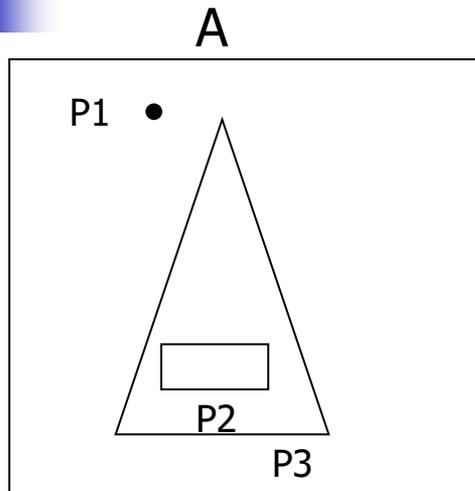
4



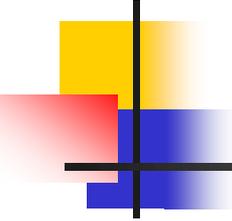
5



記号表現の例



1. (FIG-A (CONSISTS-OF P₁ P₂ P₃) (RELATIONS (INSIDE P₂ P₃) (ABOVE P₁ P₃) (ABOVE P₁ P₂))))
2. (FIG-B (CONSISTS-OF P₄ P₅) (RELATIONS (LEFT P₄ P₅))))



変換の例

Example: A → B

```
(REMOVE x1 ((ABOVE x1 x3)
              (ABOVE x1 x3)
              (SIM OB3 x1 (TRANS K 1.0 0.0 K))
            ))
```

```
(MATCH x2 FROM ((INSIDE x2 x3)
                  (ABOVE x1 x2)
                  (SIM OB2 x2 (TRANS K 1.0 0.0 K)))
              TO ((LEFT x2 x3)
                  (SIM OB2 x2 (TRANS K 1.0 0.0 K)))
              WITH (TRANS K 1.0 0.0 K))
```

答えの生成

Answer A-B-C-2:

```
(REMOVE x1 WITH ((ABOVE x1 x3)  
                  (ABOVE x1 x2)  
                  (SIM OB3 x1 (TRANS ...))  
                  ))
```

```
(MATCH x2 FROM ((INSIDE x2 x3)  
                 ( ABOVE x1 x2))  
                 ( ... ))
```

```
(MATCH x3
```

質問: いまやプログラムでも幾何図形類推問題を解くことができるので、これを人間の知能テストに使う意味がなくなった。

```
TO ((LEFT x2 x3)  
WITH (TRANS K 1.0 0.0 K)))
```

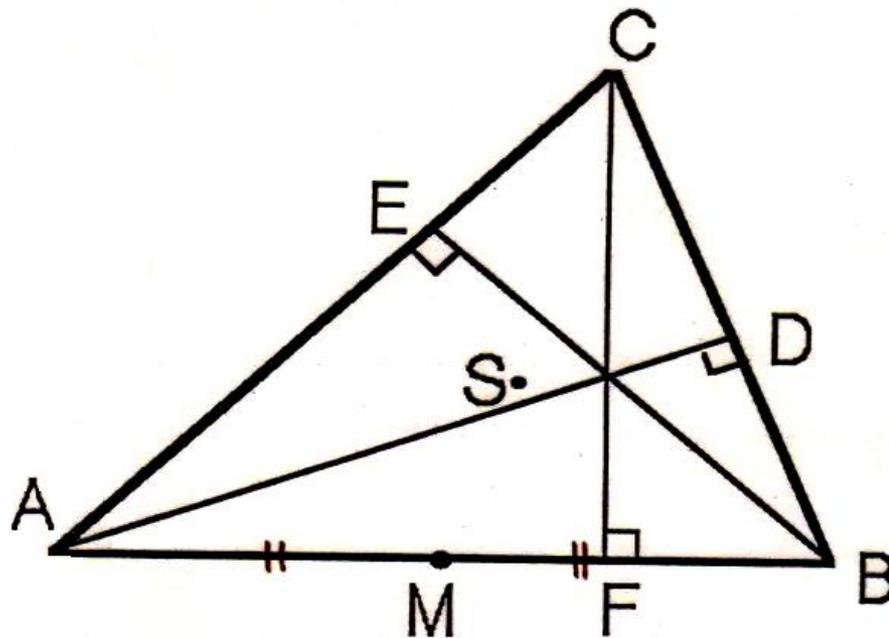
知能テストとAI

- 知能テスト(IQ)は本当に知能をはかるものか？
- もともとアメリカで人種差別的な意図や移民制限のために導入された
 - 知能検査で移民の知能を測定し、点数が低かったら移民を認めないという取り扱いが行われた。これは、移民の言語能力をあまり考慮せず、英語主体のテストで低い点が出るようなことがあったとされている。
- 「人間の測りまちがい」
 - 差別の科学誌、S.J.グールド、河出書房



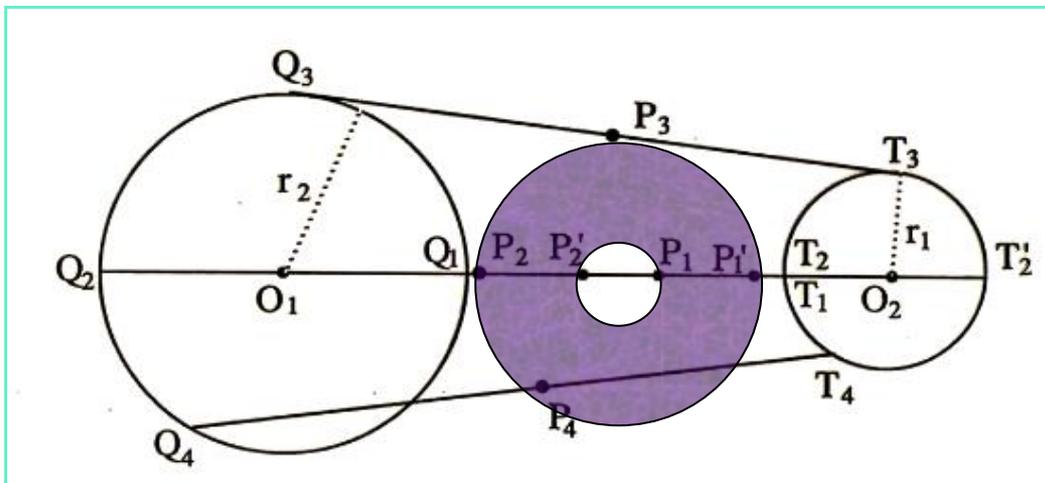
幾何学的推論：例1

- Hilbertの9点定理
- M, D, E, F は共円である



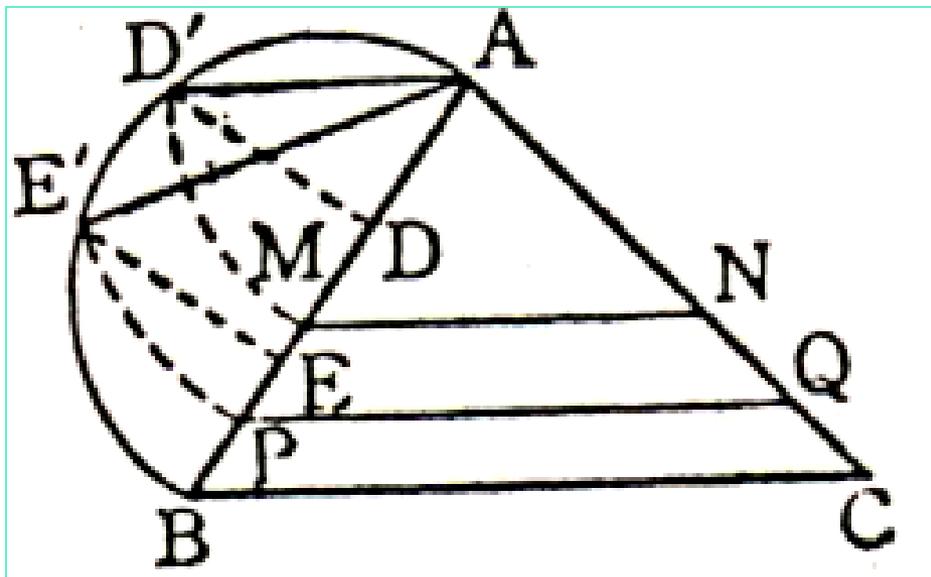
幾何学的推論：例2

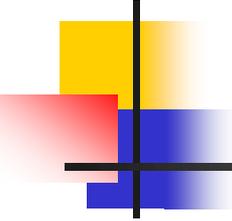
- 軌跡の問題
- QとTの中点はどんな図形になるか？



幾何学的推論：例3

- 作図問題
- 辺BCに平行な直線を引いて、 $\triangle ABC$ の面積を3等分せよ
 - 使えるのは、定規とコンパスのみ





幾何学的推論の応用

- 回路のCAD
- ロボットのpath planning, vision
- 計算幾何学

幾何学的推論の難しさ

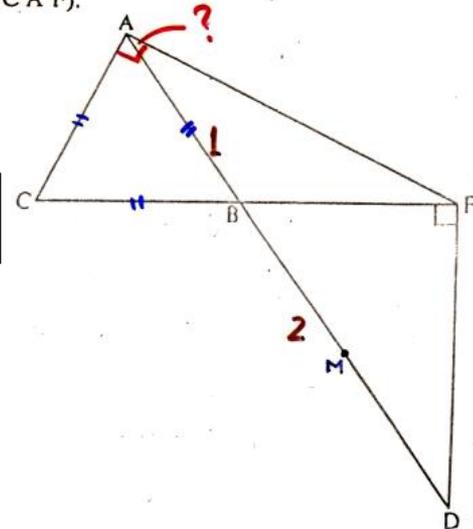
1. angle ABF = angle CEM. Vertical angles are equal.
2. angle ABC = angle FBM. Vertical angles are equal.
3. side AC = side BC. GIVEN.
4. angle ABC = angle BAC. Base angles of an isosceles triangle are equal.
5. side BC = side AB. GIVEN.
6. angle ACB = angle ABC. From steps 3 and 5 the program realizes that AC = AB and therefore concludes step 6 since base angles of an isosceles triangle are equal.
7. side AB = side BM. GIVEN.
8. side BM = side DM. GIVEN.
9. side AM = side BD. Sums of equal sides are equal.
10. right angle BFD. GIVEN.
11. side BM = side DM. Because of a right triangle the medians such as FM is equal to half of the hypotenuse. Angle ABF = angle FDM. Angle BAF = angle FDM. Base angles of an isosceles triangle are equal.
25. angle CAF = angle BFD. Triangles CAF and BFD must be congruent since angle AFB = BAF = FDM and angle ACB = ABC = FBM.
26. CAF is a right angle, which completes the proof. CAF had just been identified with a known right angle BFD.

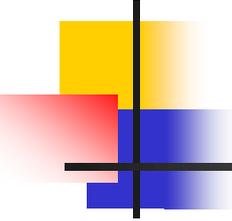
ないか？

はどう記述するか？

Example 1.

GIVEN: (ES A C C B), (ES C B B A), (ES A B B M), (ES B M M D), (RT C F D), (LN (C B F)), (LN (A B M D)).
 PROVE: (RT C A F).



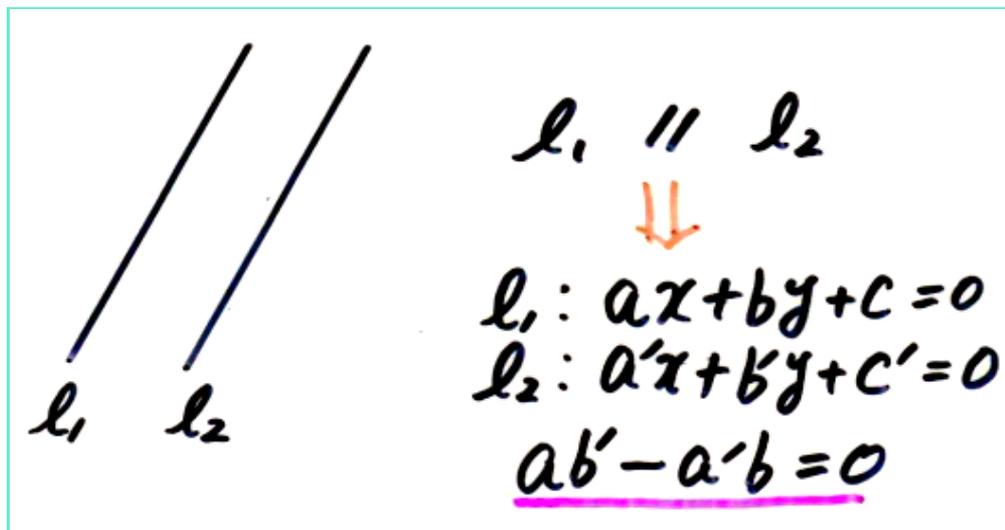


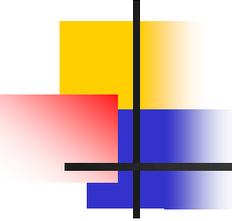
幾何学的推論の難しさ

- 記号推論ではなぜできないか？
 - 補助線をどう扱うか？
 - 幾何学的な変換不変量はどう記述するか？
- 代数的なアプローチをとろう
 - 記号論理と代数学の統合

代数学的アプローチ

- 幾何の概念を代数幾何学的に表わす
 - 多項式で表せる
- 例：平行関係





代数学的アプローチ

- Wuの方法
 - 代数多様体での証明
- グレブナー基底
 - イデアル
- Collinsの方法
 - Cylindrical algebraic decomposition
 - 不等式を扱える

ある種の代数の式で書ければ、完璧に証明可能である。

Wuの定理 [中国科学, 1978]

$$\text{hyp}_1(u_1, \dots, u_d, x_1) = 0$$

$$\text{hyp}_2(u_1, \dots, u_d, x_1, x_2) = 0$$

.....

$$\text{hyp}_r(u_1, \dots, u_d, x_1, x_2, \dots, x_r) = 0$$

三角形式

$$\text{Conc}(u_1, \dots, u_d, x_1, x_2, \dots, x_r)$$

独立変数 従属変数

} 仮定 (1)

結論 (2)

(2)が(1)の下で恒等的に0となる
即ち定理が成立する

$$\Leftrightarrow \text{Con}_r = 0 \quad \text{剰余項}$$

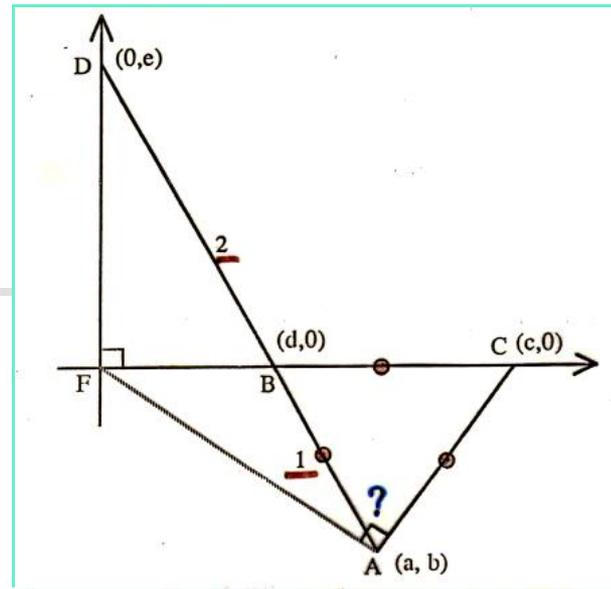
$$\text{Con}_0 := \text{Conc}$$

$$\text{Con}_{i+1} := \text{Remainder}(\text{Con}_i, \text{hyp}_{r-i+1}, x_{r-i+1})$$

) Wuの手続

Wuの定理 : 例

■ Nevinsのexample



$$\text{Hyp}_1 = (d-c)^2 - (a-d)^2 - b^2$$

$$AB = BC$$

$$\text{Hyp}_2 = (d-c)^2 - (a-c)^2 - b^2$$

$$AC = BC$$

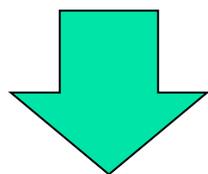
$$\text{Hyp}_3 = 3d - 2a$$

$$\text{Hyp}_4 = 2b + e$$

$$DB : BA = 2 : 1$$

$$\text{Conc} = c^2 - a^2 - b^2 - (c-a)^2 - b^2$$

$$AC^2 + AF^2 = CF^2$$



三角化

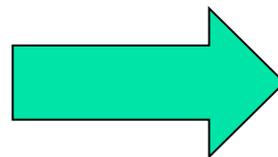
$$\text{Tri}(e, c, a, b) = e + 2b$$

$$\text{Tri}(e, c, a) = 3d - 2a$$

$$\text{Tri}(e, c) = -e^2 - 5d^2 + 4cd$$

$$\text{Tri}(e) = e^2 - 3d^2$$

Wuの手続き



$$\text{Rmd}(f_b) = -e^2 + 4ac - 4a^2$$

$$\text{Rmd}(f_a) = -e^2 - 9d^2 + 6cd$$

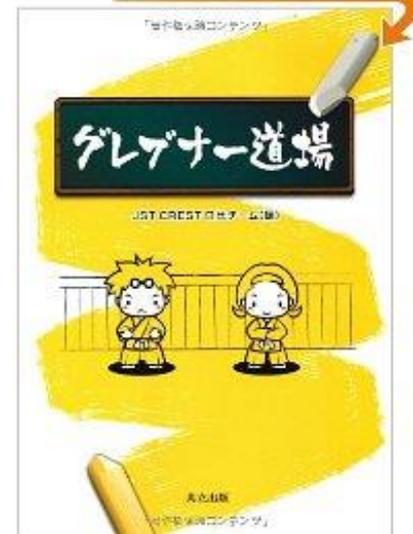
$$\text{Rmd}(f_c) = e^2 - 3d^2$$

$$\underline{\text{Rmd}(f_e) = 0}$$

$$\text{Subsidiaries} = d$$

$$\text{Assumed-positive} : e^2 + d^2$$

Gröbner基底とは？



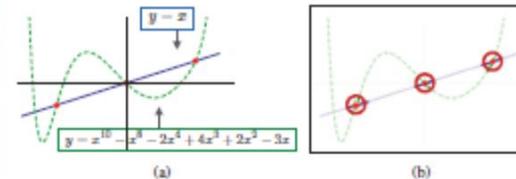
- Gröbner基底
 - イデアル
 - ブッフバーガーアルゴリズム
- 機械学習への応用

Vanishing Ideal Genetic Programming

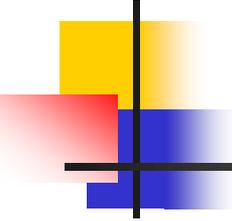
Hiroshi Kera* and Hitoshi Iba†

Department of Information and Communication Engineering
 Graduate School of Information Science and Technology
 The University of Tokyo
 Tokyo 113-8656, Japan
 Email: *kera.hiroshi@gmail.com, †iba@iba.t.u-tokyo.ac.jp

Abstract—In symbolic regression, which aims to find a function that satisfies the target values for all data points, one of the major challenges is that the solutions cannot be uniquely determined. Genetic programming (GP) provides a powerful approach to symbolic regression in that it does not require models of functions to be fixed. However, it is known that GP suffers from a phenomenon known as bloat, meaning that candidate functions attain an excessively complicated form during the search, which is undesirable in many applications. While the majority of approaches for regulating bloat introduce anti-bloat genetic operators or anti-bloat selection schemes, most of these are derived from heuristics and/or require well-tuned hyperparameters. In the present study, we propose a novel approach to

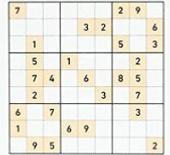


Complicated function



グレブナー基底

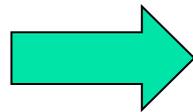
- 共通の解を持つ連立代数方程式の解きやすい (考えやすい) 形の多項式集合を以下に帰着
 - 変数の少ない方程式
 - 次数の低い方程式
- 多変数かつ高次の連立代数方程式において:
 - 解の個数、有無が判定できる
 - 解を求められる



グレブナー基底の応用

■ 数独を解く

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	ℓ
m	n	o	p



$$\begin{array}{lll}
 (a-1)(a-2)(a-3)(a-4) = 0 & a+b+c+d = 10 & abcd = 24 \\
 (b-1)(b-2)(b-3)(b-4) = 0 & c+f+g+h = 10 & efgh = 24 \\
 (c-1)(c-2)(c-3)(c-4) = 0 & i+j+k+\ell = 10 & ijkl = 24 \\
 (d-1)(d-2)(d-3)(d-4) = 0 & m+n+o+p = 10 & mnop = 24 \\
 (e-1)(e-2)(e-3)(e-4) = 0 & & \\
 (f-1)(f-2)(f-3)(f-4) = 0 & a+e+i+m = 10 & acim = 24 \\
 (g-1)(g-2)(g-3)(g-4) = 0 & b+f+j+n = 10 & bfjn = 24 \\
 (h-1)(h-2)(h-3)(h-4) = 0 & c+g+k+o = 10 & cgko = 24 \\
 (i-1)(i-2)(i-3)(i-4) = 0 & d+h+\ell+p = 10 & dh\ell p = 24 \\
 (j-1)(j-2)(j-3)(j-4) = 0 & & \\
 (k-1)(k-2)(k-3)(k-4) = 0 & a+b+e+f = 10 & abef = 24 \\
 (\ell-1)(\ell-2)(\ell-3)(\ell-4) = 0 & c+d+g+h = 10 & cdgh = 24 \\
 (m-1)(m-2)(m-3)(m-4) = 0 & i+j+m+n = 10 & ijmn = 24 \\
 (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 0 & k+\ell+o+p = 10 & k\ell op = 24 \\
 (o-1)(o-2)(o-3)(o-4) = 0 & & \\
 (p-1)(p-2)(p-3)(p-4) = 0 & &
 \end{array}$$

ただしこの式群では複雑すぎる。もっと良い方法は？

解けるかな？

いかにして問題を解くか？

- 簡単に見えて、とても難しい問題
 - 逆はとても簡単
 - 難しさはどこから来るのか？

Assumptions

$$\angle ABD = \angle CBD$$

$$\angle ACE = \angle BCE$$

$$EC = DB$$

To Prove
 $AB = AC$

