

秘書問題を解く



電子情報工学科
伊庭 斉志

秘書問題とはなにか？

- Best choice problem
- Secretary problem
- 結婚問題
- お見合い問題



- もっともすぐれた秘書を選ぶには？
- 初出
 - Martin Gardner, Scientific American, 1967

秘書問題とはなにか？



1. 1人の秘書を採用する。
2. 候補者数 n は有限であり事前に決められている。
3. 面接の直後に採否を決定する。
 - $n-1$ 回まで採用しなかったときは、 n 番目の候補者を無条件で採用する
4. 採用が決まった時点で終了し、過去に遡って不採用にした候補者を採用することはできない。
5. 同順位の候補者は存在しない。
 - 候補者を同時に評価すれば、第1順位、第2順位～第 n 順位をつけることができる
6. どの順番で、どの順位の候補者が現れるかはわからない

どのような戦略をとれば最良な選択ができるか？
第一の候補者が得られる確率を最大にしたい。

戦略の例



- $r-1$ 回までは無条件で不採用にする
- r 回以降は次の面接を繰り返す
 - それまでに不採用にした人との比較で(暫定順位が)1位ならば採用して終了する
 - そうでなければ不採用にする
- これを **cut-off rule**と呼ぶ

Cut-off ruleの例



•n=10人のときの計算例

rの値	順位一位の人を 採用できる確率 P(r)
1	0.1
2	0.2829
3	0.3658
4	0.3987
5	0.3983
6	0.3728
7	0.3274
8	0.2653
9	0.1889
10	0.1

r=4のときが最大



Cut-off rule

- n : 候補者の数
- $P(r)$: $r-1$ 人まで捨てた場合のcut-off ruleで順位1の秘書が得られる確率

- $P(r)$ を求めてみよう
- 明らかに $P(1)=1/n$

$$P(r) = \frac{r-1}{n} \sum_{k=r}^n \frac{1}{k-1} = \frac{r-1}{n} \times \left\{ \frac{1}{r-1} + \frac{1}{r} + \dots + \frac{1}{n-1} \right\}$$

Cut-off ruleの最適化

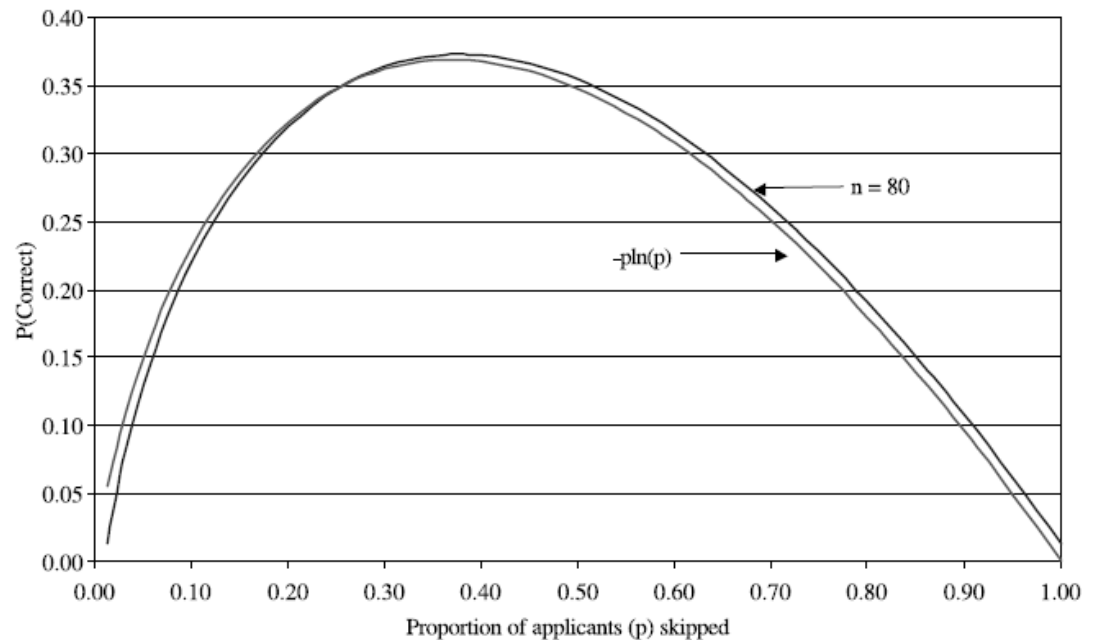
- $p=r/n$ とすると、 $n \rightarrow \infty$ のとき

$$P(r) = \frac{r-1}{n} \sum_{k=r}^n \frac{1}{k-1}$$

は、

$$V(p) = -p \log(p)$$

に近づく。





Cut-off ruleの最適化(証明)

- $p=r/n$ $\Delta p=1/n$ とする
- $1/r=1/np=\Delta p/p$ となる
- $V(p)=P(r/n)$ とおくと、 $n \rightarrow \infty$ のとき

$$V(p) = \Delta p + \left(1 - \frac{\Delta p}{p}\right) V(p + \Delta p)$$

$$\frac{V(p + \Delta p)}{p} = 1 + \frac{V(p + \Delta p) - V(p)}{\Delta p}$$

- $\Delta p \rightarrow 0$ のとき $V'(p) = 1 - \frac{V(p)}{p}$

- これを解くと以下のようになる

$$V(p) = -p \log(p)$$

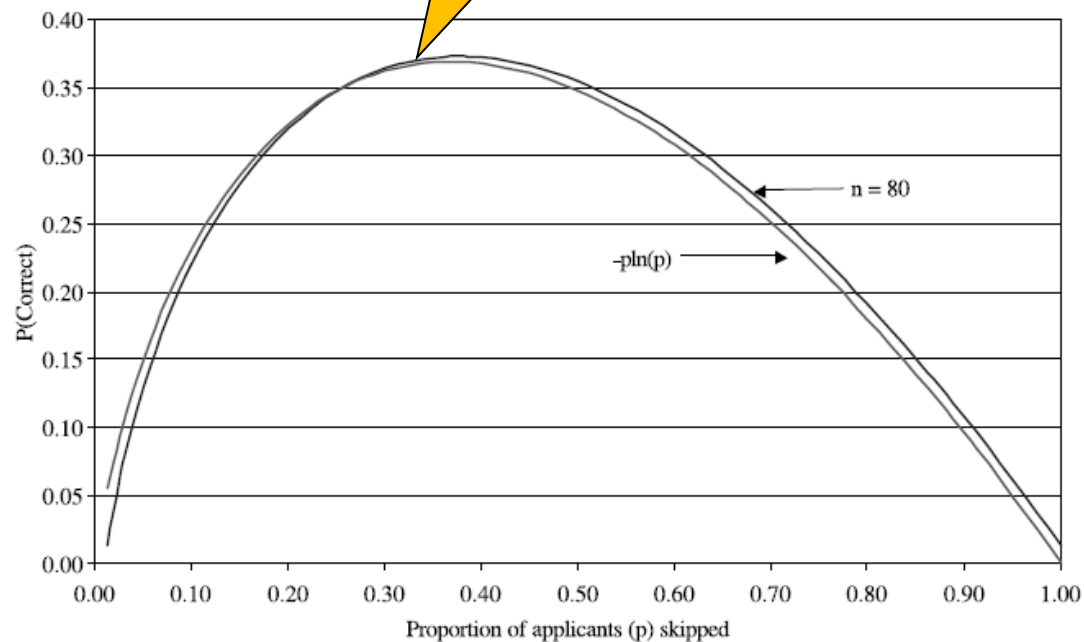
Cut-off ruleの最適化

- $p=r/n$ とすると、 $n \rightarrow \infty$ のとき

$$P(r) = \frac{r-1}{n} \sum_{k=r}^n \frac{1}{k-1}$$

は、
 $V(p) = -p \log(p)$
に近づく。

$p=1/e=0.37...$ のときが最大





最適なCut-off rule

- n : 候補者の数
- 最初の $n/e \div 37\%$ 回は見送って不採用にする
- 次の回からは不採用にした人よりも良い人が来たら即採用して終了する

これが最適な戦略か？



Successive non-candidate rule

- n : 候補者の数
- そこまでで1位でない候補者が $k-1$ 人出現した後の次の(最初の)候補者を選択する
- k はパラメータである

最適な k は？



Candidate rule

- n : 候補者の数
- 面接を始めてから1位となった数を数えて、 k 番目となる候補者を選択する
- k はパラメータである

最適な k は？