# UTILITY THEORY
# 効用理論

伊庭　斉志

# St. Petersburg のパラドクス

理想的なコインを表がでるまで投げ続ける。1回目で出れば2円、2回目で出れば4円、3回目で出れば8円、…、*n*回目なら2^n円を受け取る。

この賭けで得られる金額の期待値はいくらだろうか？

いくらの参加料ならこの賭けに参加すべきか？

| Toss | Winning |
|---|---|
| H | $2 |
| TH | $4 |
| TTH | $8 |
| TTTH | $16 |
| … | … |

# St. Petersburg のパラドクス

期待値の計算

$$\langle \text{Winning} \rangle_N = \sum_{k=1}^{N} P(k)W(k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{2^k}{2^k} = \sum_{k=1}^{N} 1 = N$$

$$\lim_{N \to \infty} \langle \text{Winning} \rangle_N = \infty$$

この賭けの価値は本当に無限大か？

何かが変だ？？？

# Bernoulliの登場

Daniel Bernoulli(1700-1782):お金の効用は、お金の金額そのものではない。

お金の効用＝log(金額)のようなもの

$$\langle \text{Utility} \rangle_N = \sum_{k=1}^{N} P(k)U(k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\ln(2^k)}{2^k} = \ln(2) \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{2^k}$$

$$= 2\ln(2)\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N - N\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\right]$$

$$\lim_{N\to\infty} \langle \text{Utility} \rangle_N = 2\ln(2) = \ln(4)$$

金額＝4円の価値しかない

# 効用とは何か？

- 効用（utility）：個人が多数の行動の1つを選択するとき、それを最大にしたいと望むもの
  - フォン・ノイマン、モルゲンシュタインンタインらによる効用理論
- 相対的な関係からどちらかを選択するか、として効用を定義する
  - 順序のみが重要、基準点はなく、数量的でもない
- 選好（preference）：選択の結果

- 効用関数：選好関係を数量的な関数で表したもの

Von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1947)
Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press: Princeton.

# 効用関数 $U(S)$

- 異なる状態S間の選考は効用関数 $U(S)$ で捉えられる。

- $U(S_i) > U(S_j)$ なら、$S_i$ を $S_j$ より好む
- 
- $U(S_i) = U(S_j)$ なら、2つの状態 $S_i$ と $S_j$ の違いは感じない（無差別である）

# 期待効用の最大化

合理的な人間は、期待効用 ($EU$) を最大にする行動を選択する。

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i U(x_i)$$

$$EU(A \mid \mathbf{E}) = \sum_i P(Result_i(A) \mid Do(A), \mathbf{E}) U(Result_i(A))$$

ここで $Result_i(A)$ は、行動 $A$ を実行したあとの可能なすべての状態を表す

# 効用理論の基礎

記法:

$A \succ B$　A がB　より好まれる

$A \sim B$　A と　B　は無差別である

$A \succsim B$　A が　B　より好まれるか、もしくは2つは無差別である

# 6つの公理

| | |
|---|---|
| Orderability | $(A \succ B) \vee (B \succ A) \vee (A \sim B)$ |
| Transitivity | $(A \succ B) \wedge (B \succ C) \Rightarrow (A \succ C)$ |
| Continuity | $(A \succ B \succ C) \Rightarrow \exists p\ [p,A;\ 1\text{-}p,C] \sim B$ |
| Substitutability | $(A \sim B) \Rightarrow [p,A;\ 1\text{-}p,C] \sim [p,B;\ 1\text{-}p,C]$ |
| Monotonicity | $(A \succ B) \Rightarrow (p \geq q \Leftrightarrow [p,A;\ 1\text{-}p,B] \succsim [q,A;\ 1\text{-}q,B])$ |
| Decomposability | $[p,A;\ 1\text{-}p,[q,B;\ 1\text{-}q,C]] \sim [p,A;\ (1\text{-}p)q,B;\ (1\text{-}p)(1\text{-}q),C]$ |

You must make a decision

この公理が満たされてるときには、以下の条件をみたすような実数値効用関数 $U$ が存在する。

$$U(A) > U(B) \Leftrightarrow A \succ B$$
$$U(A) = U(B) \Leftrightarrow A \sim B$$

# von Neumann-Morgenstern
# 合理的なエージェントの公理

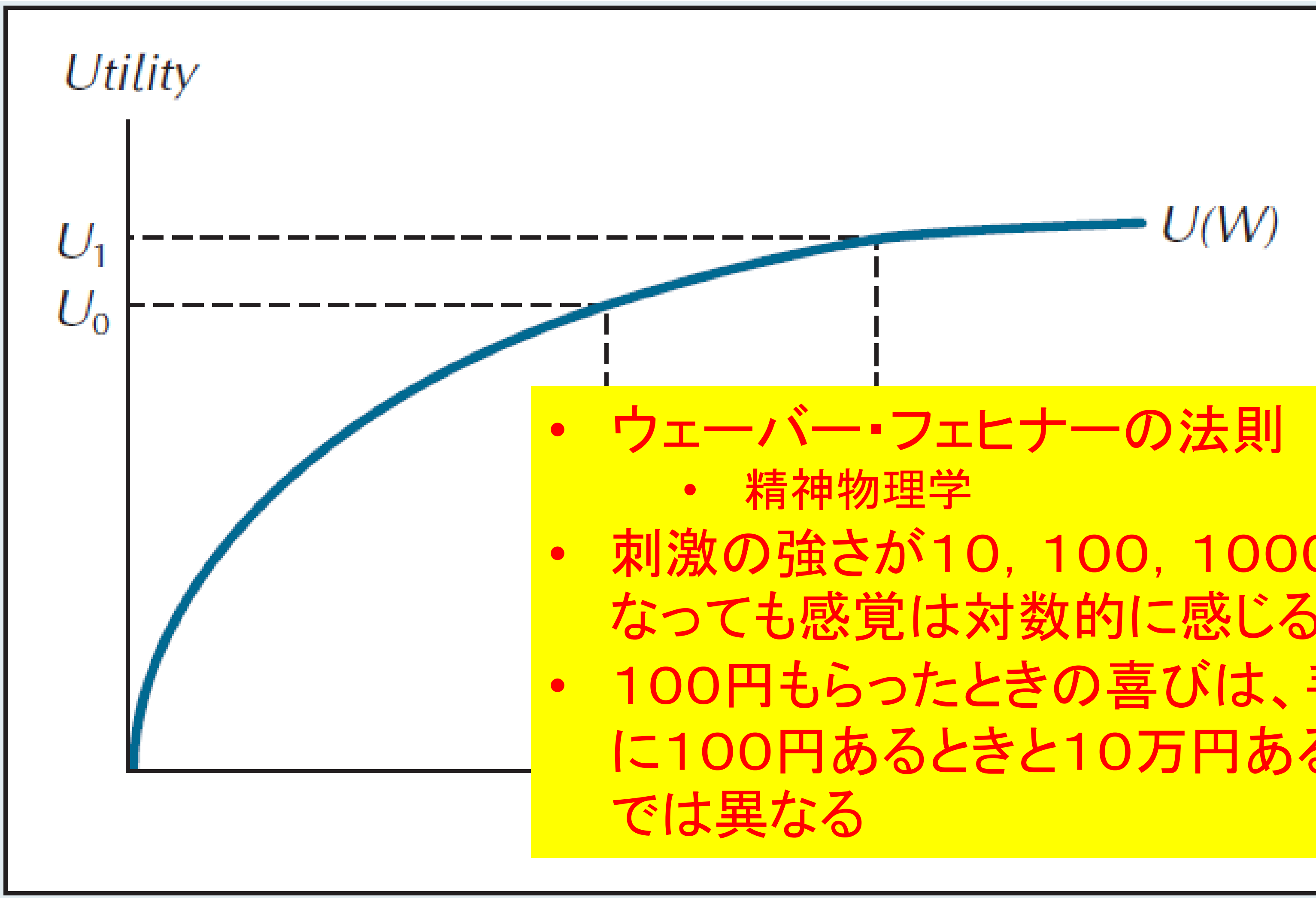
- 推移性: A と B、および B と Cが無差別であるなら、A と C も無差別でなくてはならない。
- 連続性: A がB より好まれるなら、ある確率αがあって、αA と Bは無差別である。

# von Neumann-Morgenstern 合理的なエージェントの公理

- 独立性: A と B が無差別なら、どのような確率でも、$\alpha$A と $\alpha$B は無差別である。
- *Desire for high probability of success*: $\alpha_1 > \alpha_2$ なら $\alpha_1$A は $\alpha_2$A よりも好まれる。
- 合成確率: $\alpha$A と Bが無差別で、$\alpha = \alpha_1 \alpha_2$ なら、$\alpha_1 \alpha_2$A と B は無差別である。

# 効用関数の例

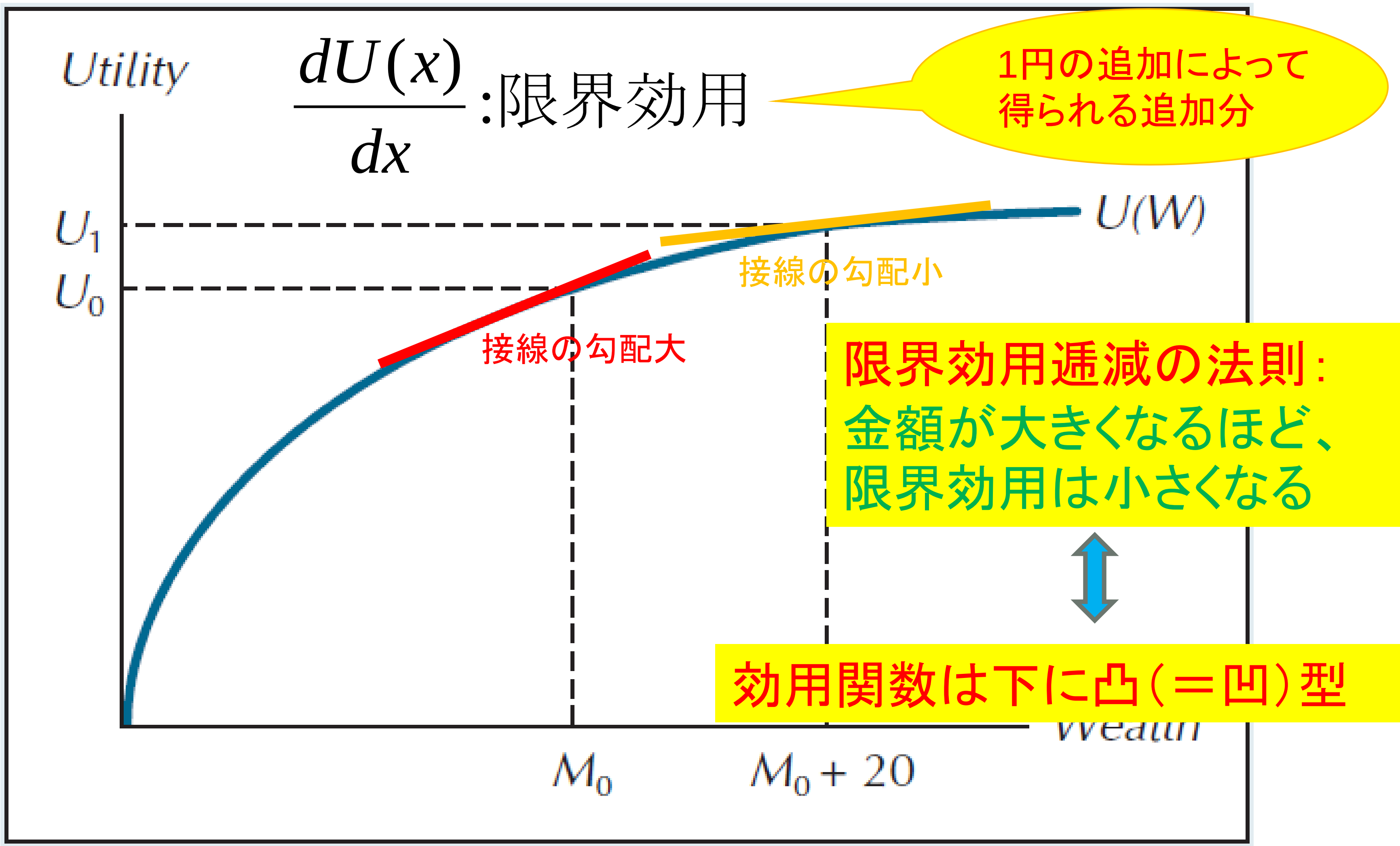
$$U(x) = k \log(x) \quad k > 0$$




- ウェーバー・フェヒナーの法則
  - 精神物理学
- 刺激の強さが10，100，1000倍となっても感覚は対数的に感じる
- 100円もらったときの喜びは、手元に100円あるときと10万円あるときでは異なる

# 効用関数の例

$$U(x) = k\log(x) \quad k > 0$$



# 効用関数の他の例

$$U(x) = 1 - e^{-x/\lambda} \quad \lambda > 0$$

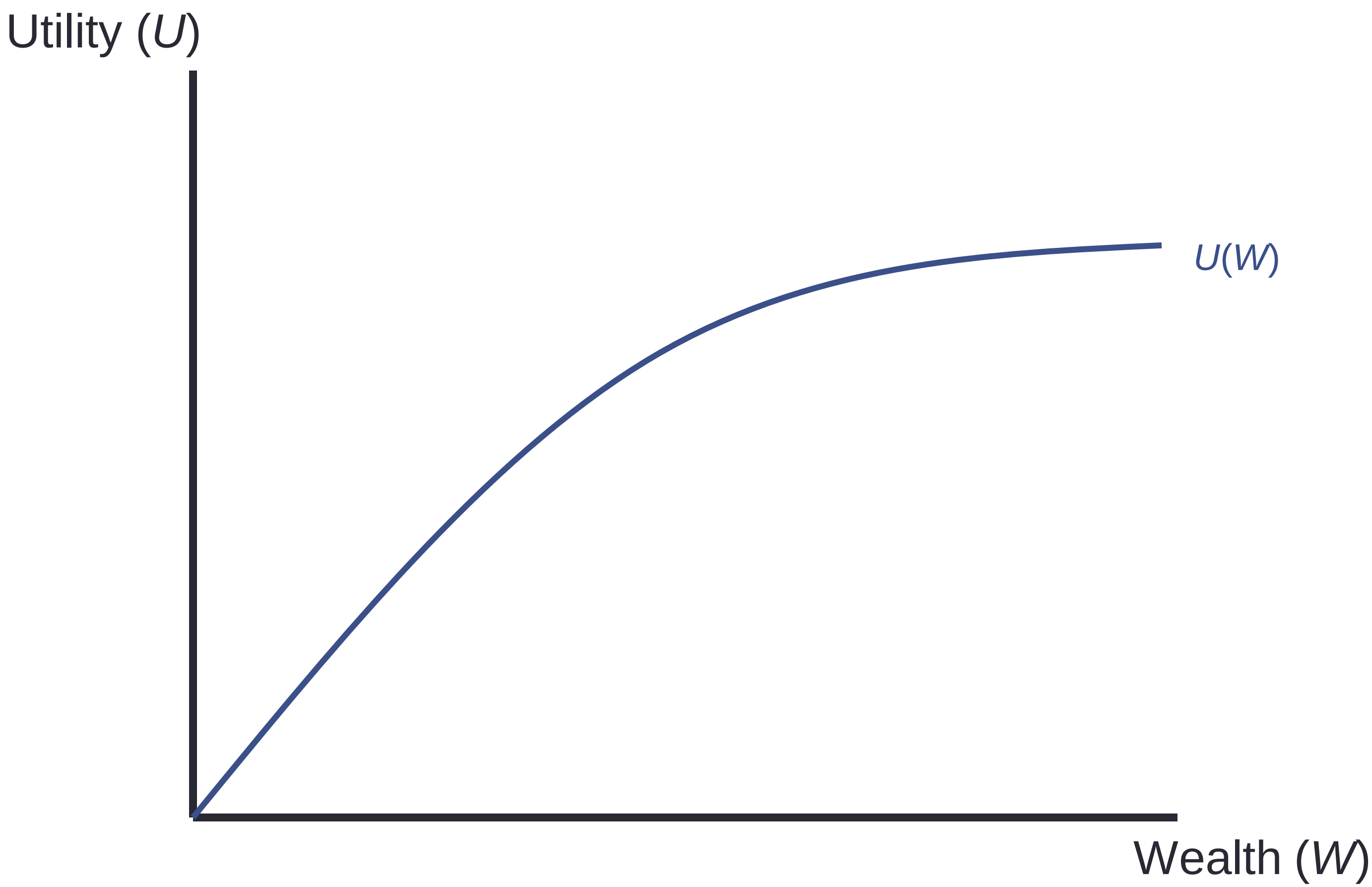
下に凸（＝凹）型
限界効用逓減

$$U(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0\text{のとき} \\ -x^2 & x < 0\text{のとき} \end{cases}$$

限界効用逓減ではない

# リスク回避

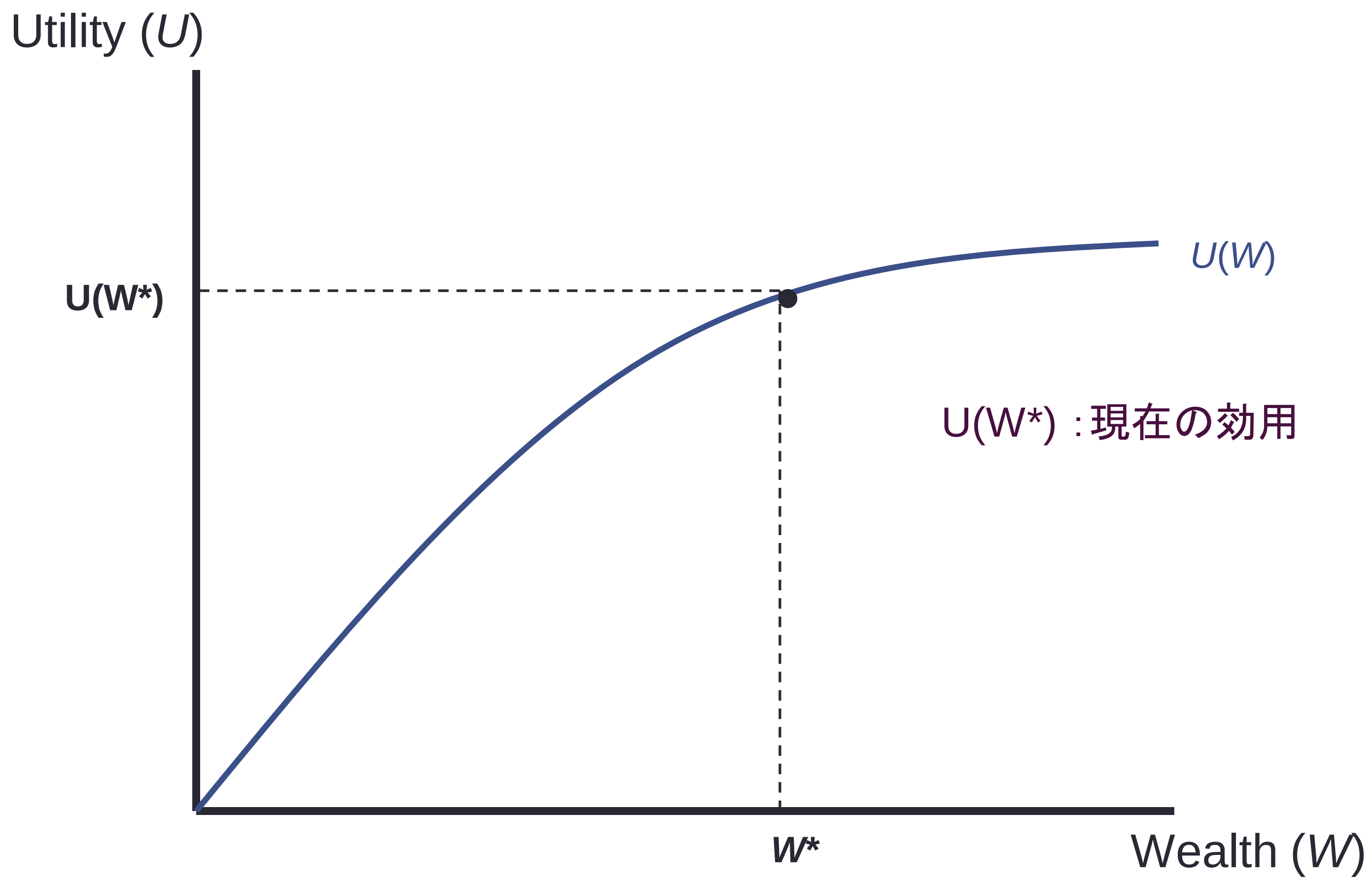
効用関数が下に凸（＝凹）型のとき



# リスク回避

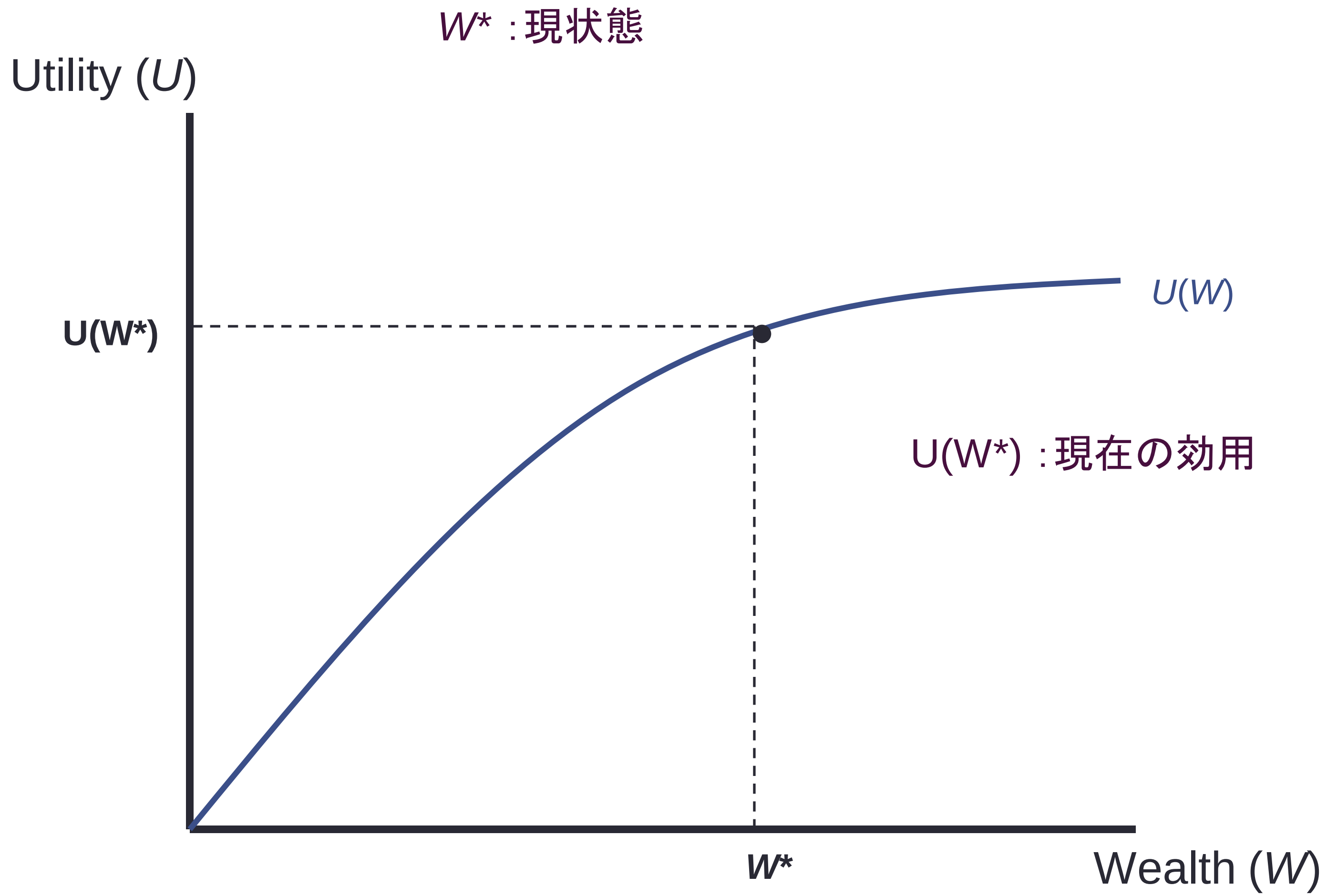
効用関数が下に凸（＝凹）型のとき

*W** :現状態



# リスク回避

効用関数が下に凸（＝凹）型のとき



# リスク回避

効用関数が下に凸（＝凹）型のとき

- 次のような賭けを考えよう:
  - (a) 五分五分の確率で、$h を得るか、失う

$$U^h(W^*) = \frac{1}{2} U(W^* + h) + \frac{1}{2} U(W^* - h)$$

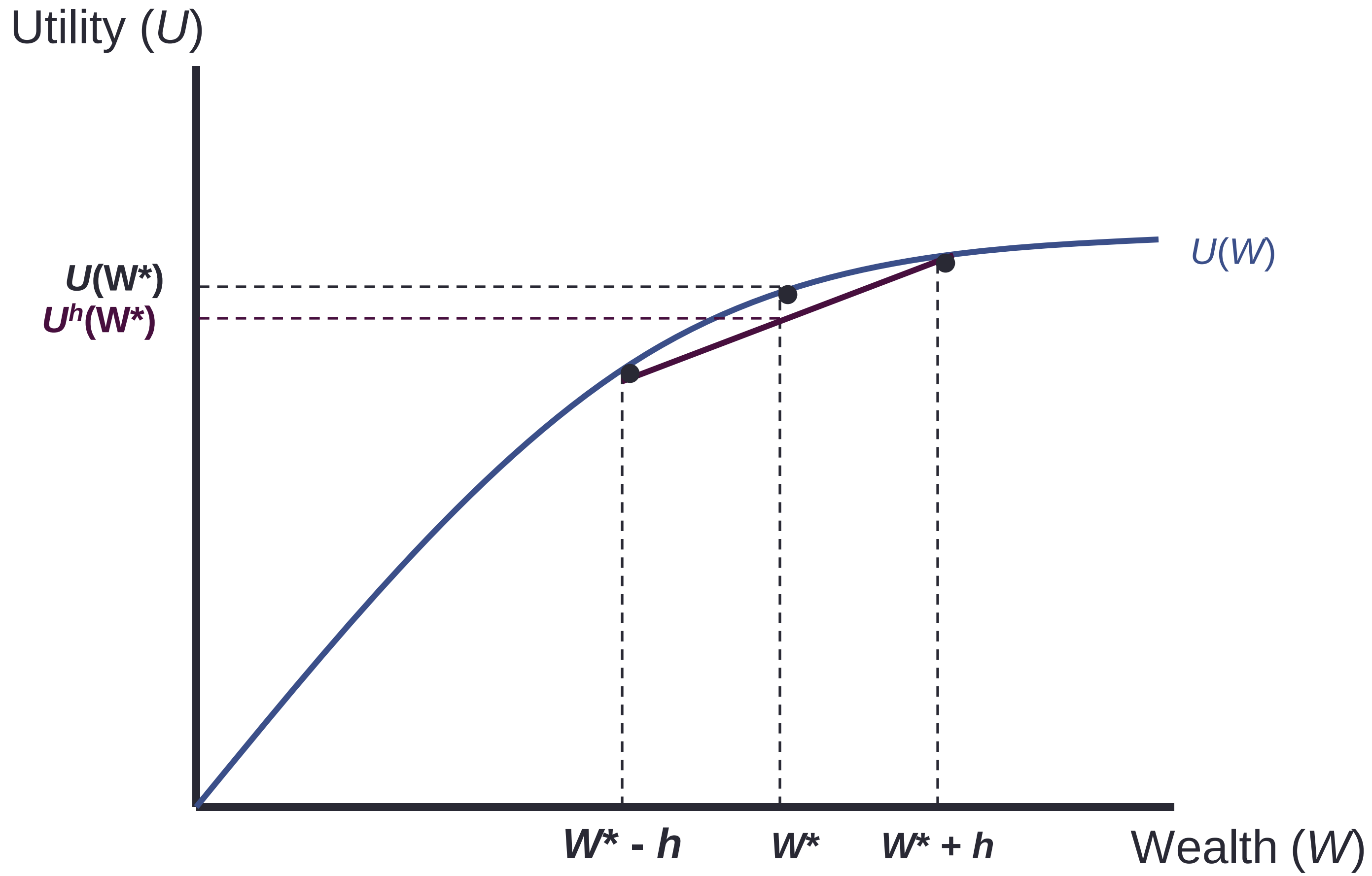
  - (b) 五分五分の確率で、$2h を得るか、失う

$$U^{2h}(W^*) = \frac{1}{2} U(W^* + 2h) + \frac{1}{2} U(W^* - 2h)$$

# リスク回避

**効用関数が下に凸（＝凹）型のとき**

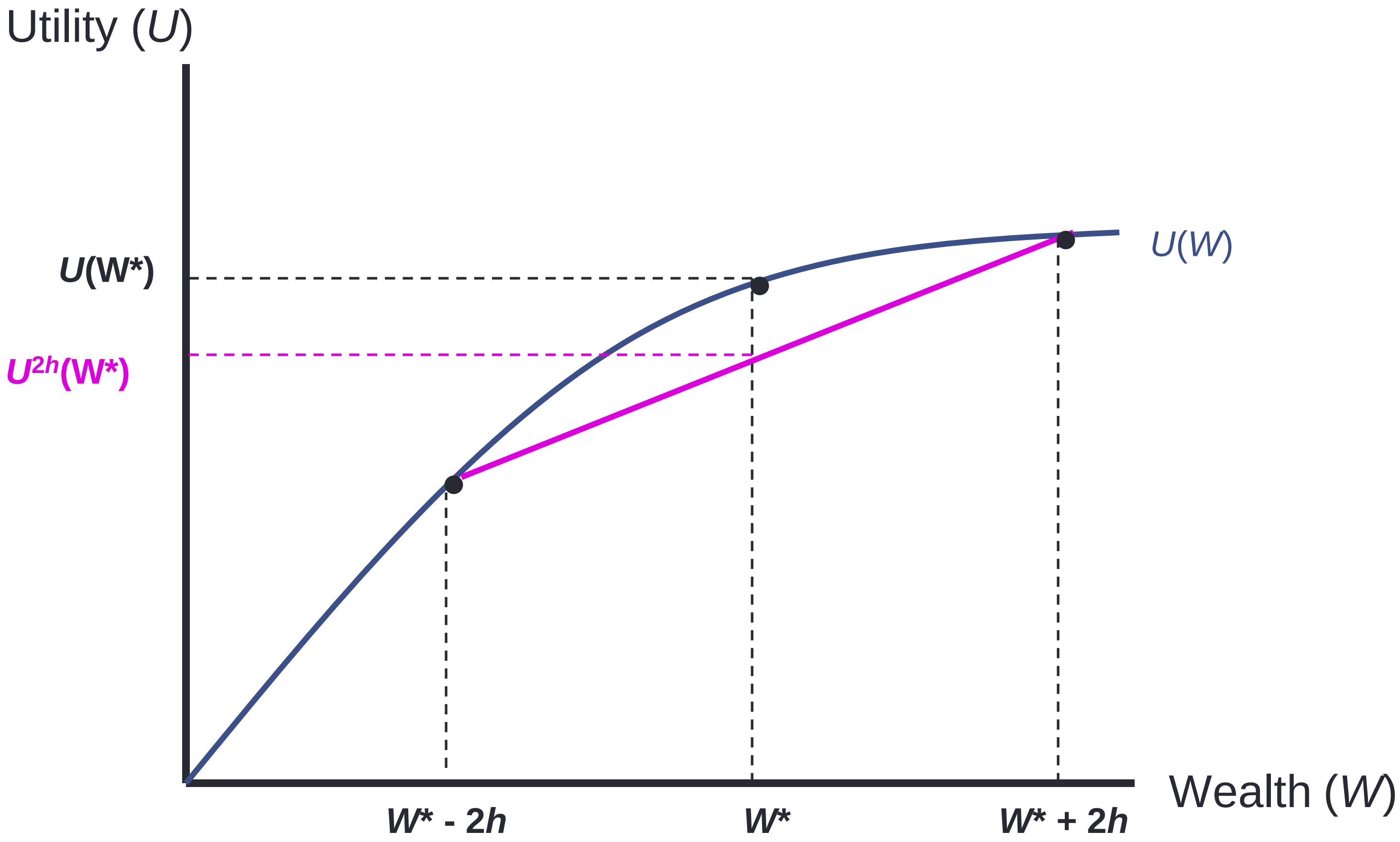
(a)の賭けの期待効用は $U^h(W^*)$



# リスク回避

効用関数が下に凸（＝凹）型のとき

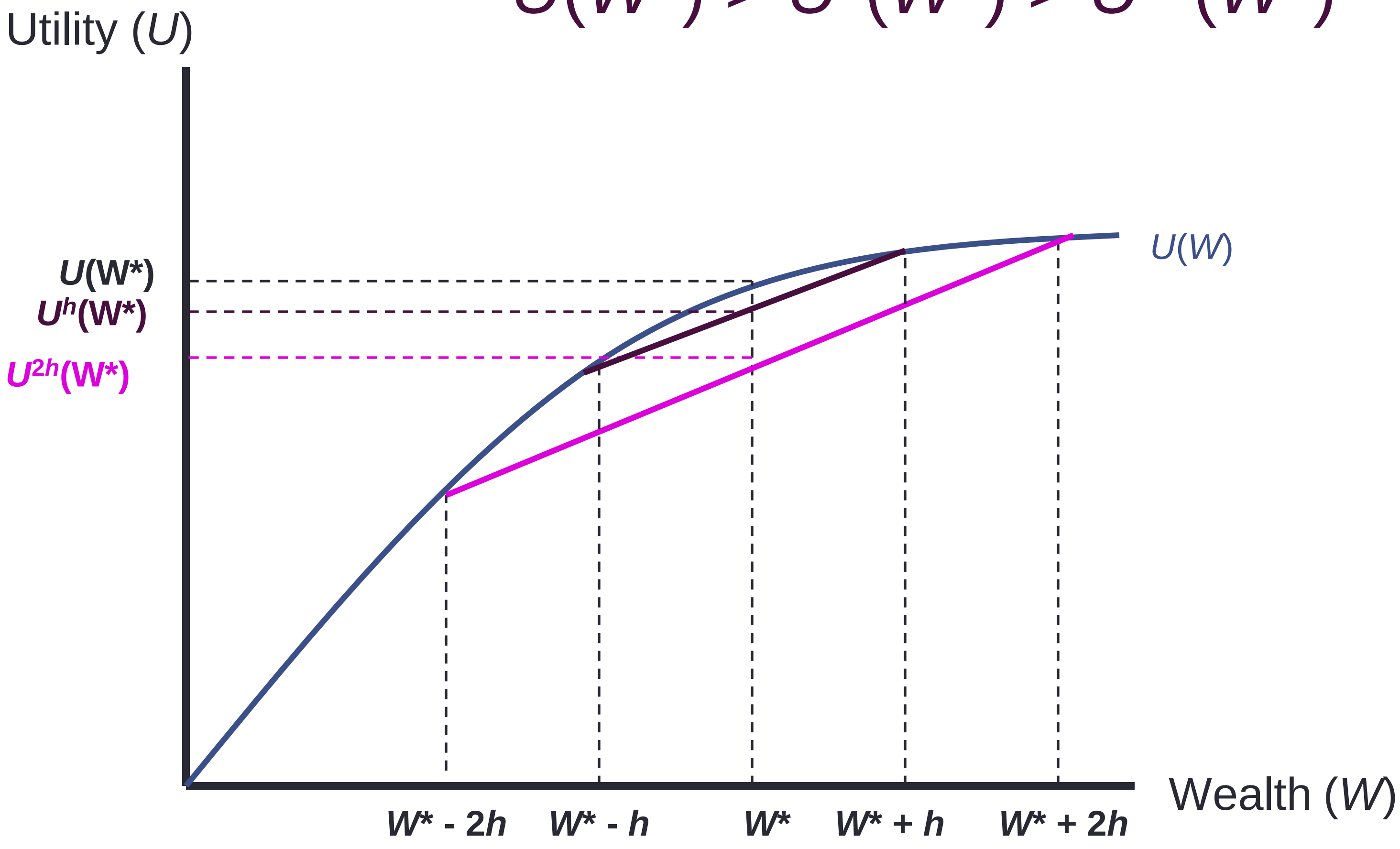
(b)の賭けの期待効用は $U^{2h}(W^*)$



# リスク回避

効用関数が下に凸（＝凹）型のとき

$$U(W^*) > U^h(W^*) > U^{2h}(W^*)$$



# リスク回避

- 効用関数が下に凸（＝凹）型のとき

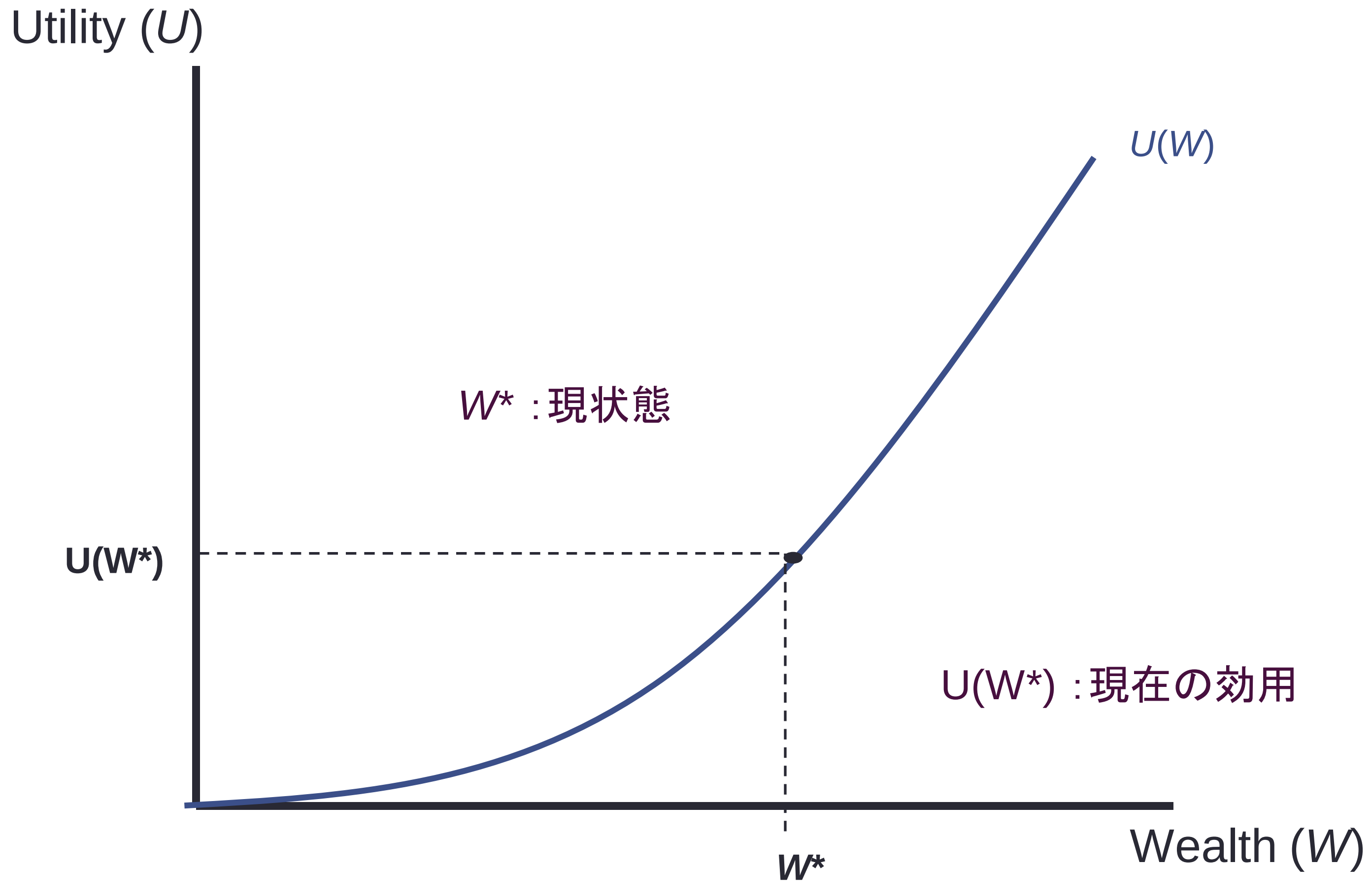
- 賭けがあるような状態よりも、現状を好む
- 大きな賭けよりも小さな賭けのほうを好む

↓

- 賭けを避けるために少額をはらうことがある
- なぜ人は保険にはいるのか？

# リスク追及

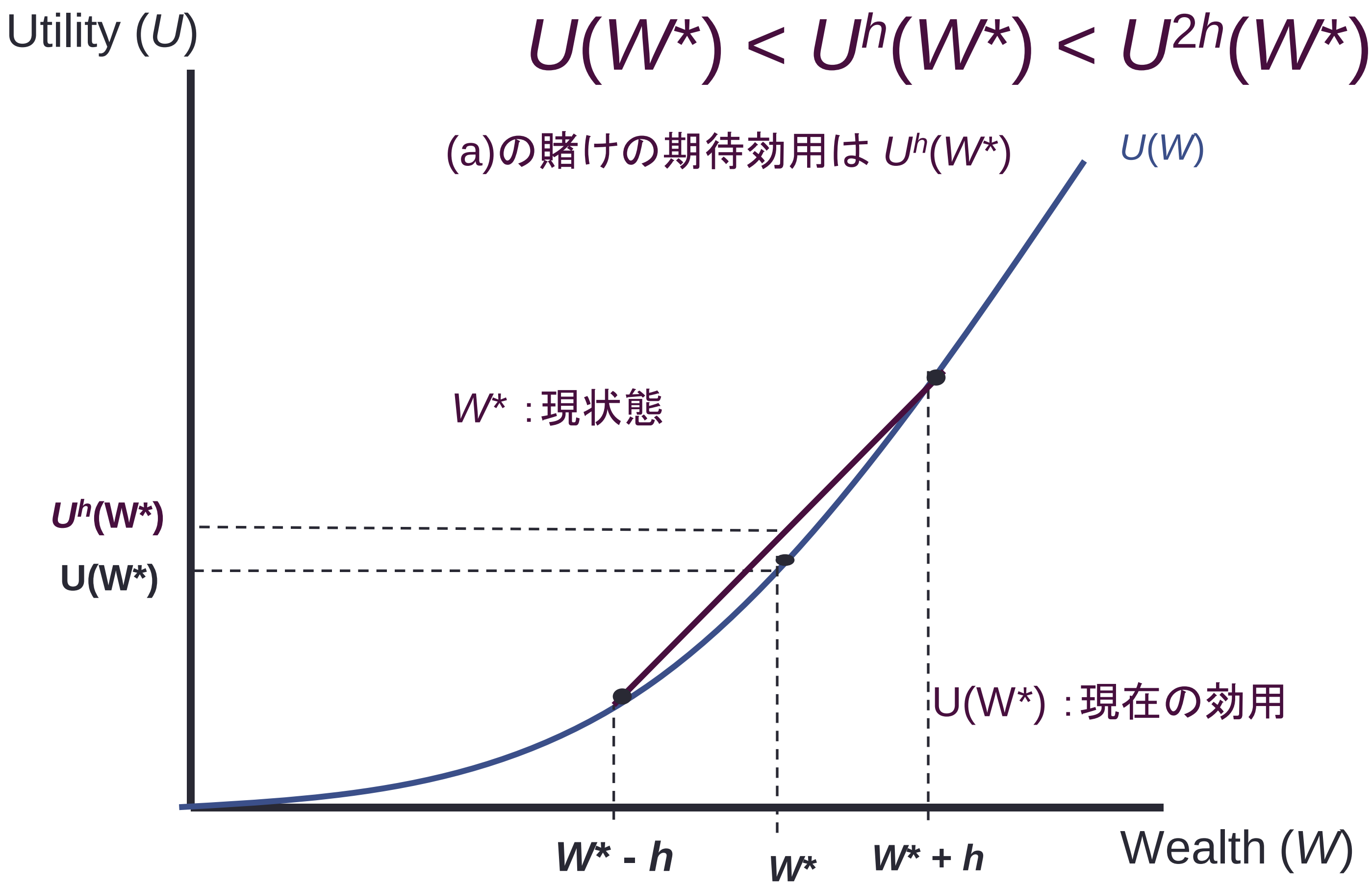
**効用関数が上に凸型のとき**



# リスク追及

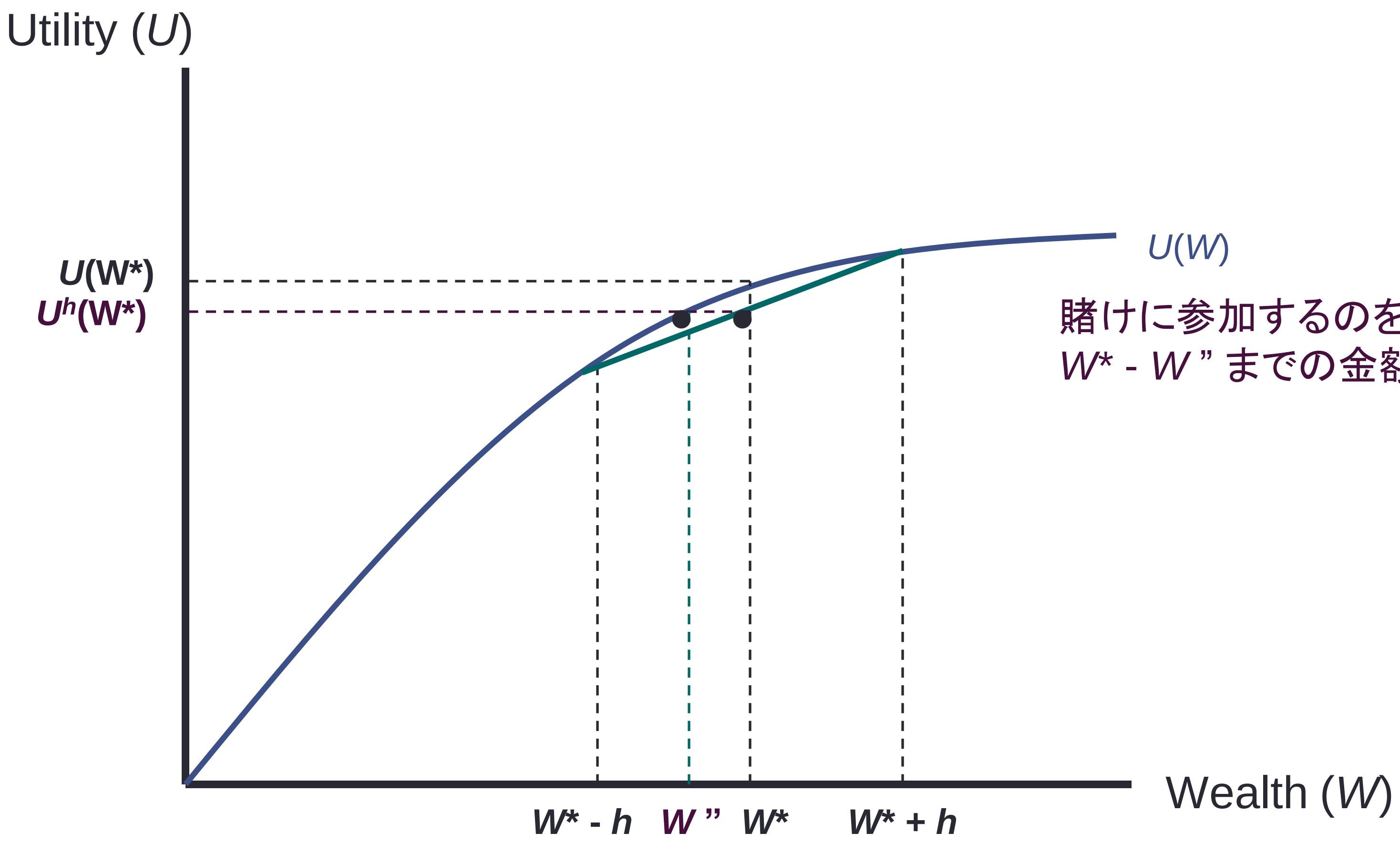
効用関数が上に凸型のとき

$$U(W^*) < U^h(W^*) < U^{2h}(W^*)$$



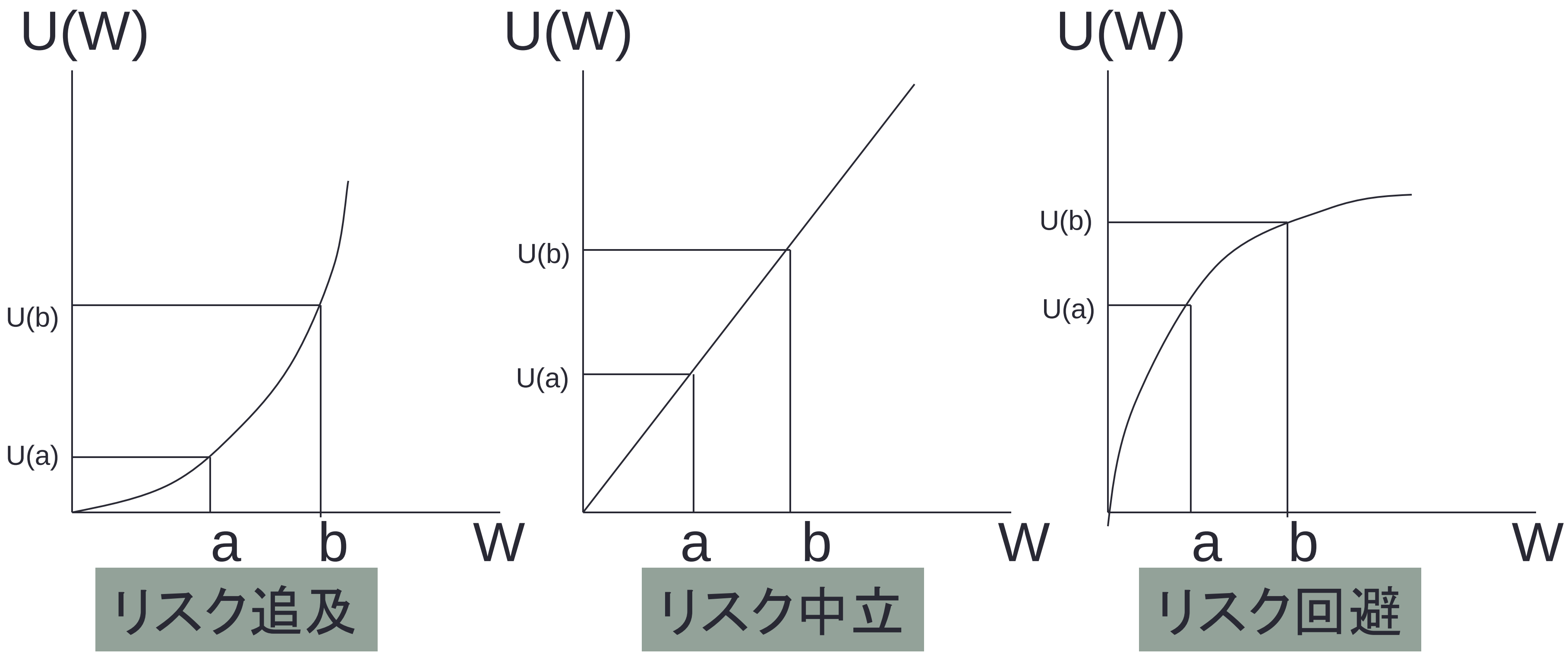
# リスク回避と保険

*W*” : 賭け(a)と同じ状態




賭けに参加するのを避けるために、
*W** - *W*” までの金額を払うべき

# リスクを好むか、嫌うか？




Goals:

(a) Formally define what is risk-aversion.

(b) Establish the concept of risk-premium

# リスク回避と保険

- リスク回避＝（公平な）賭けを常に避けること
- この場合、限界効用逓減となる
- また、賭けを避けるために金額をはらう

# なぜ保険にはいるのか？

- $100,000 の財産を持っている人を考える
- この人が、$20,000 の車を購入した
- 25% の確率で事故・盗難にあうとする
- この人は、von Neumann-Morgenstern 効用指数に従うとする

$$U(W) = ln\ (W)$$

# なぜ保険にはいるのか？

- 期待効用を求めると、

$$E(U) = 0.75U(100{,}000) + 0.25U(80{,}000)$$

$$E(U) = 0.75\ ln(100{,}000) + 0.25\ ln(80{,}000)$$

$$E(U) = 11.45714$$

- この状況では、公平な保険のプレミアムは、$5,000 ($20,000の25%)である

# なぜ保険にはいるのか？

- 賭けをさけるためには、$5,000以上でもはらうだろう。

- いくらまでならはらうか？

$$E(U) = U(100{,}000 - x) = ln(100{,}000 - x) = 11.45714$$

$$100{,}000 - x = e^{11.45714}$$

$$x = 5{,}426$$

- 最大のプレミアムは、$5,426　である

# リスク回避の尺度

- 相対的リスク回避（Arrow-*Pratt* 測度）

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

- リスク回避の場合には, $U''(W) < 0$
  - $r(W)$ will be positive for risk averse individuals
  - $r(W)$ is not affected by which von Neumann-Morganstern ordering is used

# リスク回避と富

- 富の増加とともにリスク回避が減るというのは必ずしも正しくない
  - 限界効用逓減による損失は、富が多いほど問題でなくなる
  - しかし、限界効用逓減によって、賭けに勝つことによる利得の魅力もまたなくなっていく
    - 結果は効用関数の形に依存する

- 賭けを避けるのに喜んで払うことは富と独立ということはなさそうである
- より有望な仮定は、富とは反比例するのではないか？

# リスク回避と富

- 効用関数が、富の2次関数のとき

$$U(W) = a + bW + cW^2$$

ただし、$b > 0$ かつ $c < 0$　である

- 相対的リスク回避:

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = \frac{-2c}{b + 2cW}$$

- よって、リスク回避は富とともに増える

# リスク回避と富

- 効用関数が、富の対数関数のとき

$$U(W) = ln\ (W)$$

ただし、$W > 0$　である

- 相対的リスク回避：

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = \frac{1}{W}$$

- よって、リスク回避は富とともに減る

# リスク回避と富

- 効用関数が、富の指数関数のとき

$$U(W) = -e^{-AW} = -\exp(-AW)$$

ただし、$A$は正定数である

- 相対的リスク回避:

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = \frac{A^2 e^{-AW}}{Ae^{-AW}} = A$$

- よって、リスク回避は富とは独立に定数である

# 古典的な効用理論への批判

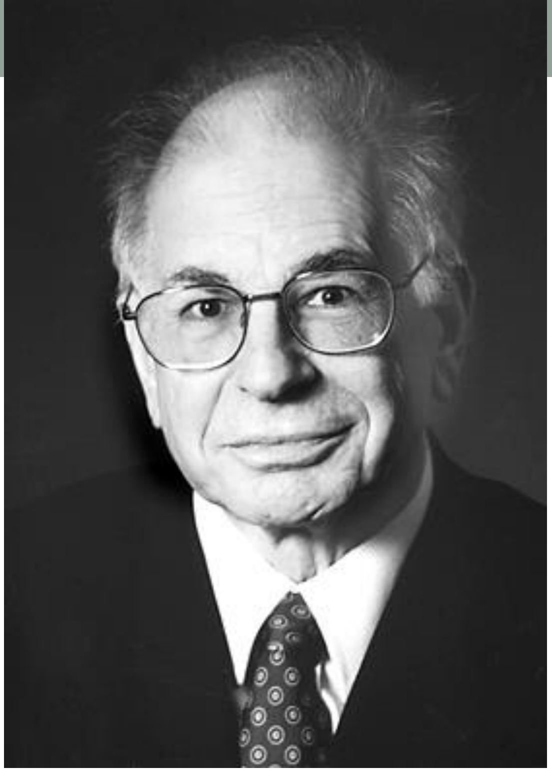
- リスクは単一の数（期待効用）ではとらえきれない
- 効用が多くの人にとって意味をなさない
- 自然な効用関数は存在しない
  - どんなときに対数や平方根をもちいるべきか？
- 人は公理に従わない
  - Prospect Theory from Daniel Kahneman and Amos Tversky

# プロスペクト理論

- 行動経済学
- 心理学＋経済学
  - *Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk*, by Daniel Kahneman and Amos Tversky, *Econometrica*, Vol. 47, No. 2 (March 1979), pp. 263-292
- 合理的なエージェント（エコン）は存在しない

- Key concepts
  - 損失回避
  - 現状バイアス
  - 授かり効果（保有効果）

ダニエル・カーネマン（1934年- ）
2002年：ノーベル経済学賞



エイモス・トベルスキー
（1937年 - 1996年）

# 古典的経済学 vs. 行動経済学

- 伝統的考え
  - 合理的エージェント
  - 合理的行為者＝エコン
    - 完全情報
    - 期待効用に基づいた選択

- 行動主義的、心理学
  - 人（ヒト）はときにはまったく合理的でなく、古典的な効用理論に基づいて行動しない

# 参照点

- Bernoulli: “富のどんな小さな増加に起因する利得も、過去に保有していた財産量に反比例するはず”
- 冒険的は機会（賭け）の評価は、結果とし得られる財産よりも、可能な利得・損失の起こる参照点により依存する.
- “選好は、参照点の変化で操作される” (Tversky)

- しあわせの度合いは、当初の富の状態に対する変化によって決まる

# 参照点の例

ベルヌーイの理論:
どちらのOptionでも全く同じ選択肢である
∴ どちらのOptionでも同じようにえらぶはず

- Option 1: あなたは現在の富に加えて1000ドルもらったうえで、次のどちらかを選ぶように言われました。
  - 50%の確率で1000ドルをもらう。
  - または、確実に500ドルをもらう。

同じ確率で
1000ドルまたは2000ドル

確実に1500ドル

- Option 2:あなたは現在の富に加えて2000ドルもらったうえで、次のどちらかを選ぶように言われました。
  - 50%の確率で1000ドルを失う。
  - または、確実に500ドルを失う。

同じ確率で
1000ドルまたは2000ドル

確実に1500ドル

# 参照点の例

ところが、実際には。。。

- Option 1:  あなたは現在の富に加えて1000ドルもらったうえで、次のどちらかを選ぶように言われました。
  - 50%の確率で1000ドルをもらう。
  - または、確実に500ドルをもらう。

- Option 2:あなたは現在の富に加えて2000ドルもらったうえで、次のどちらかを選ぶように言われました。
  - 50%の確率で1000ドルを失う。
  - または、確実に500ドルを失う。

# 参照点の例

ところが、実際には。。。

- Option 1:　あなたは現在の富に加えて1000ドルもらったうえで、次のどちらかを選ぶように言われました。
  - 50%の確率で1000ドルをもらう。
  - または、確実に500ドルをもらう。

多くの人が確実さを選ぶ

- Option 2:あなたは現在の富に加えて2000ドルもらったうえで、次のどちらかを選ぶように言われました。
  - 50%の確率で1000ドルを失う。
  - または、確実に500ドルを失う。

多くの人がギャンブルを選ぶ

# 参照点の例

ところが、実際には。。。

- Option 1:  あなたは現在の富に加えて1000ドルもらったうえで、次のどちらかを選ぶように言われました。
  - 50%の確率で1000ドルをもらう。
  - または、確実に500ドルをもらう。

多くの人が確実さを選ぶ

参照点は+1000ドル　∴500ドル増えるのがいい

- Option 2:あなたは現在の富に加えて2000ドルもらったうえで、次のどちらかを選ぶように言われました。
  - 50%の確率で1000ドルを失う。
  - または、確実に500ドルを失う。

多くの人がギャンブルを選ぶ

参照点は+2000ドル＋　∴500ドル確実に減るのはいやだ

# 不変性の喪失

- 不変性: A がB より好まれ、B が Cより好まれるなら, A は C　より好まれる
- チケットをもって映画に行くとき
  - $40 のチケットをなくした
  - もう一枚チケットを買うか?
- 映画に行くので、チケットを映画館でかうとき
  - $40　のチケット代をなくした
  - もう一度 $40 を用意してチケットを買うか?
- 多くの人々は失ったチケットを再び買うことはしない(a)が、＄40を出してチケットを買う(b)ことはする

# 授かり効果（The endowment effect）

- “Ownership creates satisfaction”
  - 所有感は、満足感を生む

- ヒトは自分のものになると、より価値をおく

Thaler, R. (University of Chicago), Toward a positive theory of consumer choice. Journal of Economic Behavior and Organization, March, 39-60, 1980.

学生が大学のマグカップをもらう。そのマグカップを売るならいくら出すかを答えてもらう。


マグカップをもらわなかった学生は、それを得るのにいくらはらうかを答えてもらう。

次のうちどうなったか?

a) マグカップのある学生がより高く評価した.
b) マグカップのない学生がより高く評価した.
c) 両方の学生が同じように評価した.

マグカップのある学生の平均販売金額

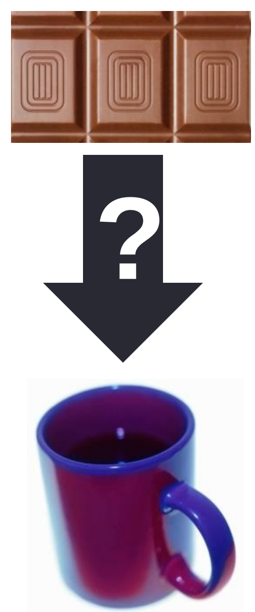
**$4.50**

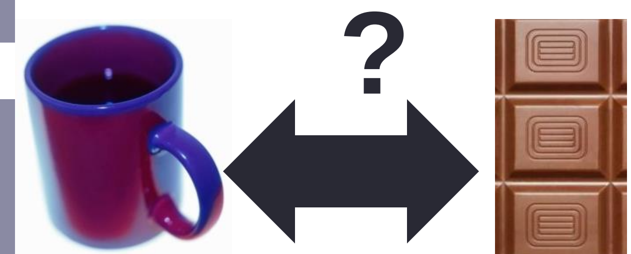

マグカップのない学生の平均支払い金額

**$2.25**

Kahneman, D. (UC Berkley), Knetsch, J. (Simon Fraser U), Thaler, R. (Cornell), 1990, Experimental tests of the endowment effect and the Coase theorem. *Journal of Political Economy, 98*(6), 1325-1348.

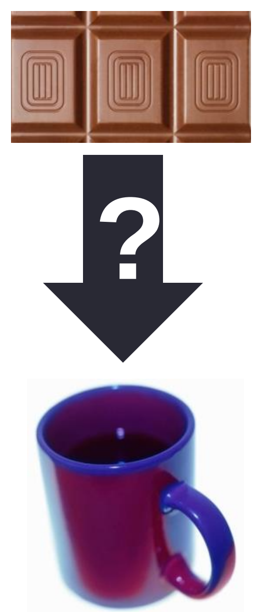
| Class A | Class B | Class C |
| --- | --- | --- |
| はじめに学生にマグカップが与えられる。最後に、それをチョコレートバーと交換するか提案される。 | 学生にチョコレートバーが与えられる。次にそれをマグカップと交換するか提案される。 | はじめから、チョコレートバーかマグカップかどちらにするか提案される。 |

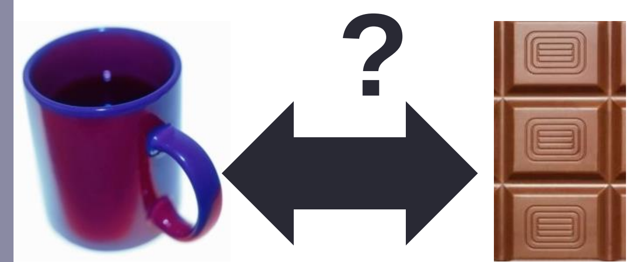




**どのクラスがもっともマグカップを選びやすいか？**

| Class A | Class B | Class C |
| --- | --- | --- |
| **89%** | **10%** | **59%** |
| マグカップを選ぶ | マグカップを選ぶ | マグカップを選ぶ |

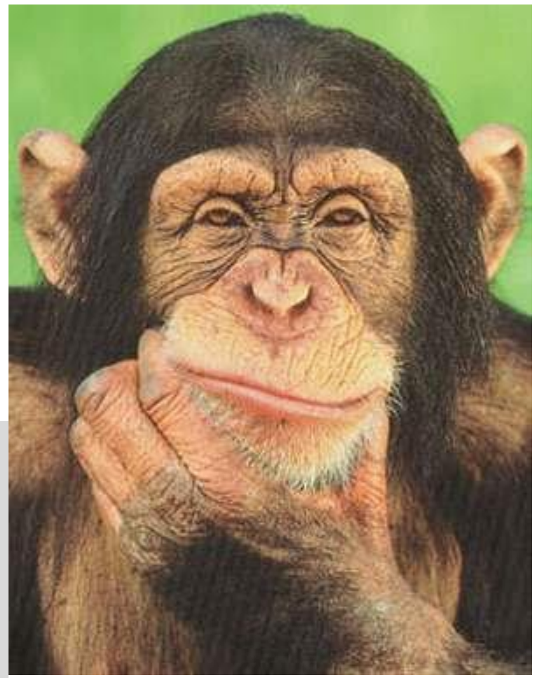

J. Knetsch (Simon Fraser U.), 1989, The endowment effect and evidence of nonreversible indifference curves. *American Economic Review, 79*, 1277-1284.

33匹のチンパンジーに、アイスキャンディーかピーナッツバターのいずれか（どちらも好物である）を与えて、もう一方と交換できるようにした。


**ピーナッツバターが先**

**89%**

**ピーナッツバターを選ぶ**




**アイスキャンディーが先**

**42%**

**アイスキャンディーを選ぶ**

Brosnan, S. (Emory), et al (Texas, Vanderbilt), 2007, Endowment effects in chimpanzees. *Current Biology, 17*, 1704-1707.

# 授かり効果とマーケティング


- Money-back guarantees： 返金保証
  - 商品を試すのをためらうことを減じる効果がある
- 一度でも商品を試してみると、授かり効果によって取引が成立する

- IKEA効果
  - 人はより多くの資源をつぎ込むと、その所有感覚が増加する
  - 自分が作ったものには愛着がわく
  - 認知的バイアス

The IKEA effect: When labor leads to love
Michael I. Nortona, Daniel Mochonb, Dan Arielyc,
Journal of Consumer Psychology,
Volume 22, Issue 3, July 2012, Pages 453–460

# 仮想的な所有感覚

- ある商品を所有したり、いっしょに暮らすと想像すると、あたかもすでに所有したような感覚になる
- このvirtual ownershipによって、購買や実際の所有に誘導される
- 成功する広告は商品と一緒の性格を生き生きと想像させることにたけている

# 思考における授かり効果

- ある考えを一度受け入れると、それを捨て去るのは難しい
- これが思想的な厳密さのはじまりである
- われわれはその考えに反するような証拠をまじめに考えにくい
- すでに信じている考えを支持する証拠のみを考えてしまう

# 損失回避

- "People are more motivated by avoiding a loss than acquiring a similar gain"
  - 人々は、同程度の利得を得るより、損失を避けることに動機づけられる

- フレーミング効果
  - 同じ選択が利得でなくて損失でフレームされると、異なる決定がなされる

# フレーミング効果

<u>提案1：</u>　子供に対する控除額は、低所得者よりも高所得者を多くすべきですか？

⇒　NO!　金持ちに有利な税額控除なんてとんでもない

<u>提案2：</u>　子供のいない低所得者は、子供のいない高所得者と同額の追加納税をはらうべきですか？

⇒　NO!　とんでもない

BUT　よく考えてみよう。

論理的に考えてみれば、両方を拒絶することはできない。

# 損失回避

致命的な感染症に600人がかかるとしよう。
以下の2つの対策のどちらを選ぶか？

**72%** A: 400人が死ぬ

**28%** B: 1/3 の確率で 600 人が助かり、2/3 の確率で一人も助からない

Tversky, A. & Kahneman, D., 1981, The framing of decisions and the psychology of choice. *Science, 211*, 453-458.

# 損失回避

致命的な感染症に600人がかかるとしよう。
以下の2つの対策のどちらを選ぶか？

**22%** A: 200人が助かる

**78%** B: 1/3 の確率で 誰も死なず、2/3 の確率で600人が死ぬ

Tversky, A. & Kahneman, D., 1981, The framing of decisions and the psychology of choice. *Science, 211*, 453-458.

# 損失回避とフレーミング効果

600 人が死ぬ…

| 1/3 の確率で 誰も死なず、2/3 の確率で600人が死ぬ | = | 1/3 の確率で 600 人が助かり、2/3 の確率で一人も助からない |
| --- | --- | --- |
| **78%** | **≠** | **28%** |

損失を避けるのに多大のリスクを負う。
同じ選択を損失としてフレームし直すと決定か変更される。

以下の2つから選ぶ

A)$240の利得

**84%**

B)25% の確率で $1000の利得, 75% の確率で何も得られない

**16%**

余分の利得を得るためにリスクを負うことはすくない。

以下の2つから選ぶ

A)$750の損失

**13%**

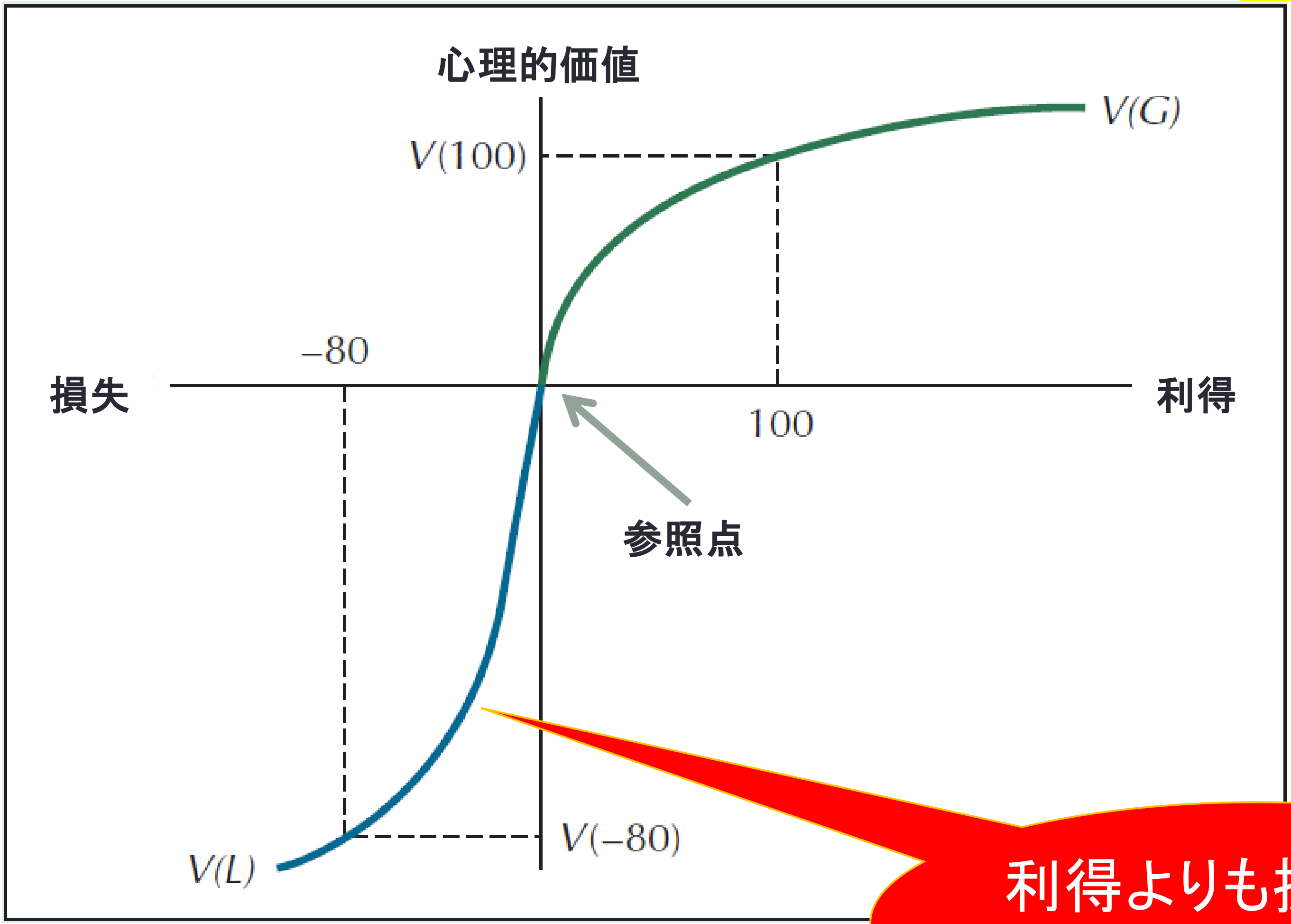
A)25% の確率で $1000の損失, 75% の確率で何も損しない

**87%**

余分の損失を避けるためにリスクを負いやすい。

# Kahneman-Tversky 価値関数

非対称な関数




利得よりも損失で
より急峻な傾きとなる

# Kahneman-Tversky 価値関数

1. 人は利益と損失を非対称に扱う。
2. 意思決定において利得より損失に非常に重きを置く。
3. これは、必ずしも不合理なふるまいを意味ものではない。
4. 人は最初に項目を個別に評価し、個々の価値を合計する。

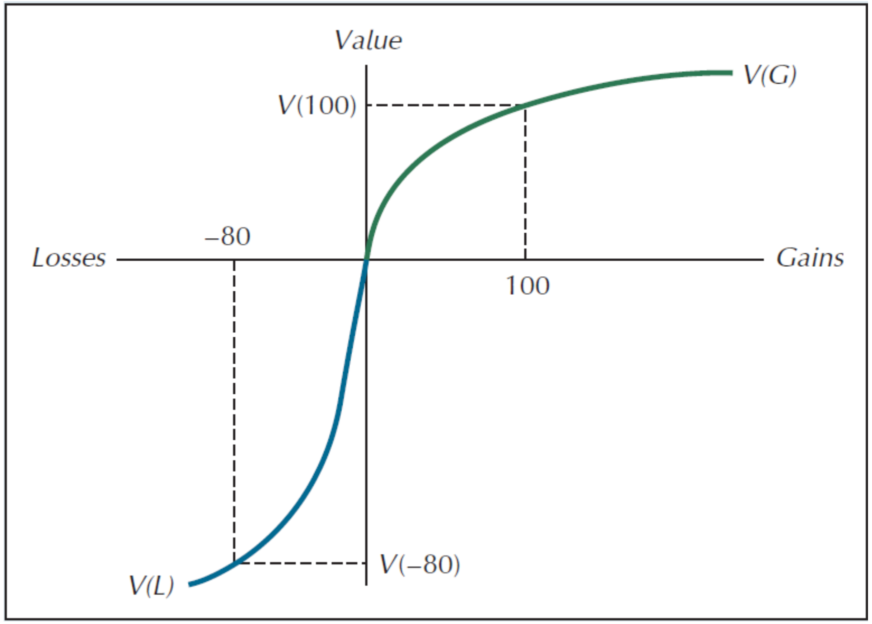
例:ゴルフのパッテンングでバーディ／パーを狙う場合
250万回分のデータを分析
パー狙いはバーディ狙いよりも成功率が高い
これは、パットの難易度やカップからの距離と無関係

# Kahneman-Tversky 価値関数

利得も損失もありうるギャンブルでは損失回避になり、極端にリスク回避的選択をとる

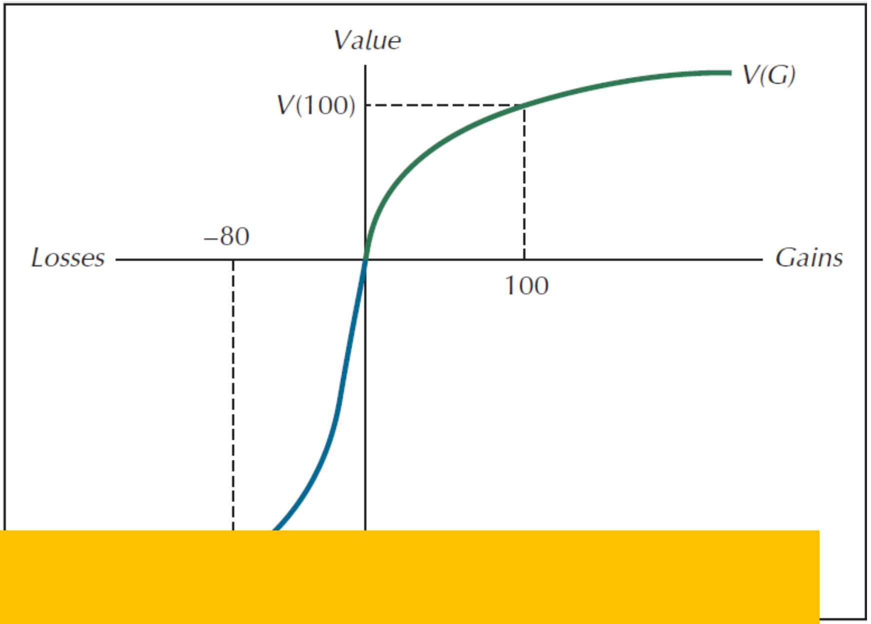
損失の傾き　＞　利得の傾き
（グラフの左）　（グラフの右）

起こりうる損失が起こりうる利得の数倍も強く感じられる



# Kahneman-Tversky 価値関数

確実な損失と不確実だが大きな損失のように、どちらに転んでも悪い結果となるギャンブルでは、**リスク追及的**になる




損失領域のグラフの傾きは次第に緩やか

損失に対

よって、リ

まとめ：

人間が意思決定するとき、

＊損失の領域（左側）ではリスクを追及する

＊利得の領域（右側）ではリスクを回避する

# 効用理論の間違い

Risk Aversion and Expected-utility Theory: A Calibration Theorem, Matthew Rabin, Econometrica, Volume 68, Issue 5, pp.1281–1292, 2000. .

賭け1： 50%の確率で100ドルを失うが、50%の確率で200ドルをもらえる

賭け2： 50%の確率で200ドルを失うが、50%の確率で2万ドルをもらえる

多くの人は、賭け1には手を出さない。

古典的効用理論に従うと、賭け1を断る人は、賭け2も断ることが証明できる。

そんなはずはない!!

正気の人間なら、賭け2を断ることはないだろう

# 再び、効用とは何か？

- 効用には2つある

- 決定効用（decision utility）：「好ましさ」「望ましさ」
  - ベンサム、エッジワース、マーシャルら従来の定義
  - なぜその選択をするかを説明するもの
  - しかし人間の行動の説明において必ずしも正しくない

- 経験効用（experienced utility）：従来の効用理論の考え、快楽や苦痛の経験の尺度

  - 持続時間は関係ない
  - ピーク・エンド法則

# 再び、効用とは何か？

- とても痛い注射がある。決して慣れることはなく、毎日同じように痛い。

- このとき、患者にとっていかの2つは同じ効用だろうか？
  - 注射の回数を20回から18回に減らす
  - 注射の回数を6回から4回に減らす

- 古典的効用理論によると、
  - 注射の回数を20回から18回に減らす　⇒　1/10減
  - 注射の回数を6回から4回に減らす　⇒　1/3減　よって、効用大

- 本当か？　何か変だ？

# 決定効用

- ピークエンドの法則
  - 記憶に基づく評価は、ピーク時と終了時の苦痛・快楽の平均でほとんどきまる

- 持続時間の無視
  - 苦痛・快楽の持続時間は、総量の評価にはほとんど影響を及ぼさない