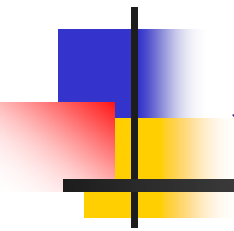


スケジューリング理論

電子情報工学科
伊庭　斉志

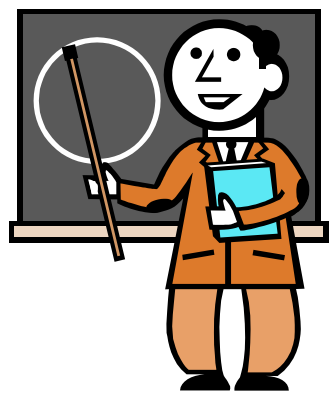
スケジューリング

- テストに備えよう
  - 明日の試験のために勉強
  - ただ手持ちの教科書を丸暗記
  - 過去の出題の傾向

- プロジェクト(project)をどうやって効率的に推進するか？

スケジューリングの例

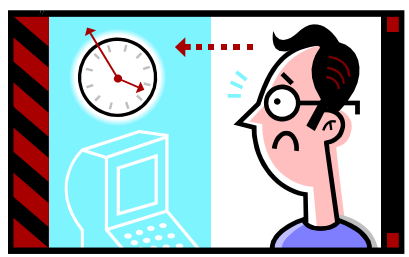
- 看護婦のスケジューリング
- フライト･クルー、飛行プランのスケジューリング
- 講義･教室のスケジュール
- レポートの提出順序のスケジュール



どういう順で仕事をするか？

- Jobの割付の優先規則
  - コンフリクトの起こったときの解消方法
  - ディスパッチング･ルール

- レポートの作成順
  - SPT: Shortest processing time
  - EDD: Earliest due date
  - SLACK
  - FIFO
  - RANDOM
  - … ect.

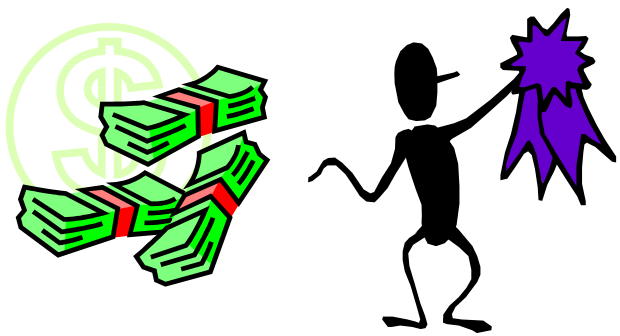


実用的なディスパッチングルール

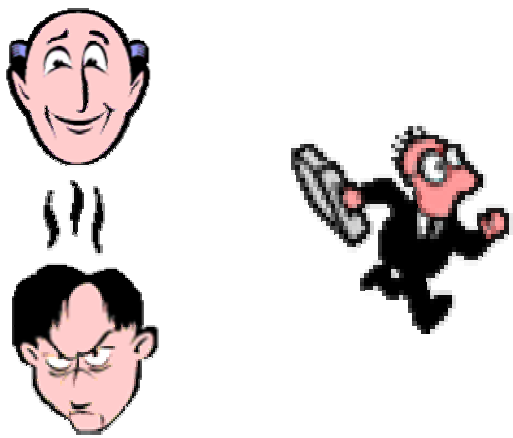
- SPT (shortest processing time):処理時間が最小の仕事を選ぶ。平均納期遅れを小さくするが、納期遅れの大きな仕事も出る。
- EDD (earliest due date):納期に最も近い仕事を選ぶ。納期遅れに関する評価尺度に対して有効。
- SLACK (SLACK time):スラック時間（＝納期－現在時刻－総残り加工時間）が最小の仕事を選ぶ。納期遅れに関する評価尺度に対して有効。
- FIFO (first in first out):中立的なルール。RANDOMと同様の性格だが、RANDOMよりも結果にばらつきがない。

制約とメ切

- **制約条件**
  - **ペナルティ**
  - **ボーナス**



- **メ切**
  - Soft deadline
  - Hard deadline



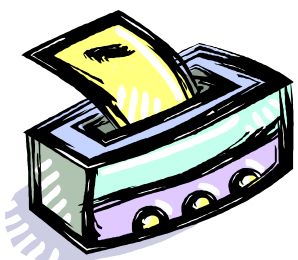
教科書

- オーム社
- Excelで学ぶ遺伝的アルゴリズム

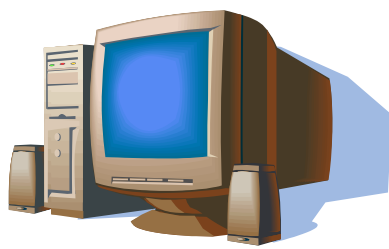
- 6章「スケジューリング理論」
- 第2回レポート課題

スケジューリングの例

３つのタスクA, B, Cを２種のハードウェアM_1, M_2で処理するのにどのような順で遂行すればよいか？



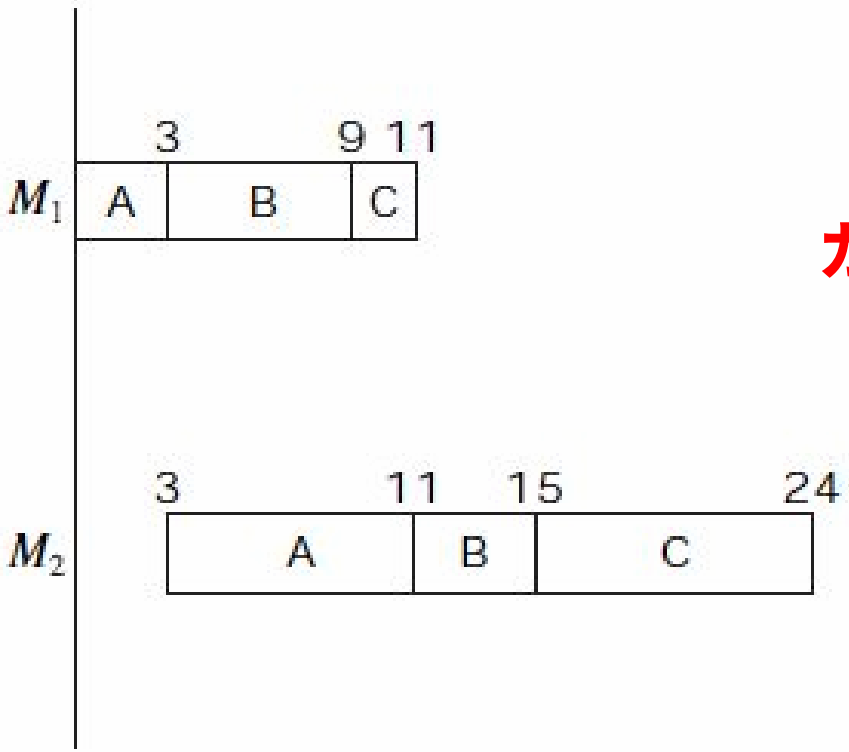
タスク＼hard	M_1	M_2
A	3	8
B	6	4
C	2	9



スケジューリングの例

	M_1	M_2
A	3	8
B	6	4
C	2	9

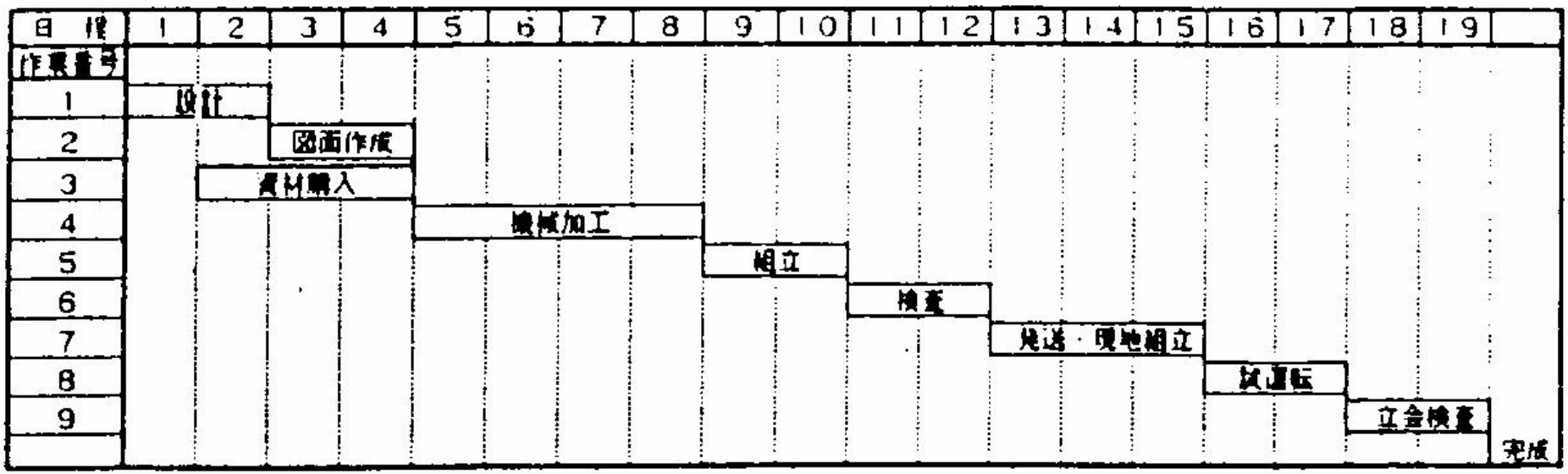
例：A→ B → C



ガントチャート

ガントチャート

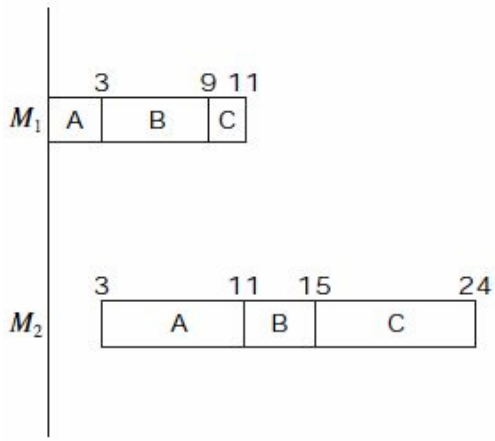
- 進行状況が時間を横軸とした棒グラフ
- ある時刻においてどの作業が完了しており、どの作業は進行中であり、どの作業は未着手であるかが分かる



スケジューリングの例

	M_1	M_2
A	3	8
B	6	4
C	2	9

- 最適解をもとめるには？
  - A→ B → C
  - A→ C → B
  - B→ A → C
  - B→ C → A
  - C→ A → B
  - C→ B → A



ジョンソンの規準

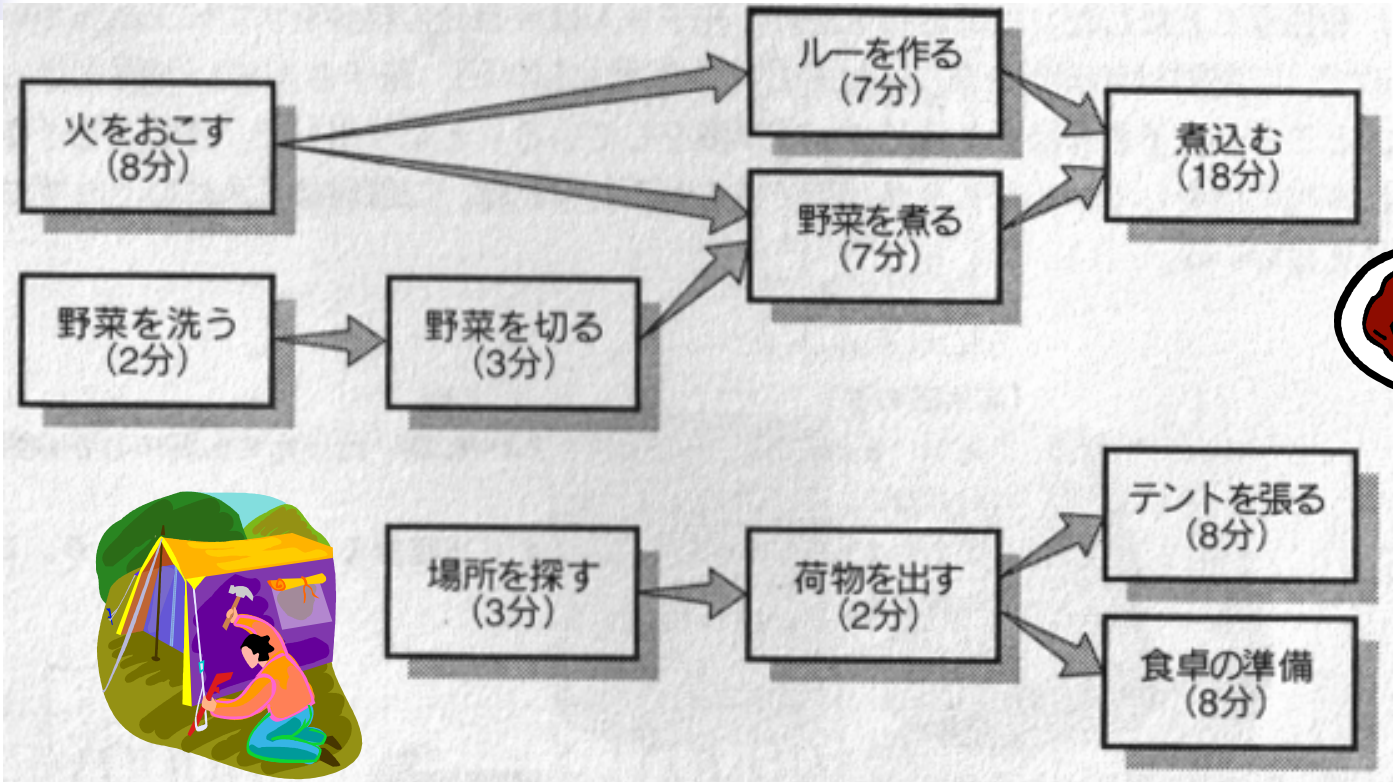
	M_1	M_2
A	3	8
B	6	4
C	2	9

- 所要時間の表の中の最小の値をマークする。
- これがもしM_1側にあれば、その処理を最初に持ってくる。
- もしM_2側ならばラストにまわす。
- これをすべてのタスクが終わるまで繰り返す。

ジョンソンの規準

タスクの数が一般に3種類以上になると、特殊な場合を除いては、ジョンソンのような見事な規準は見あたらない。

キャンプでカレーを作ろう！！



自分の仕事が終わってすぐ取りかかれる仕事があれば取り組む。ないなら取りかかれるようになるまで休む。

キャンプでカレーを作ろう！！

2人の方が3人よりも早い！！

ジョブショップ・スケジューリング

- ＪＳＳＰ (Job Shop Scheduling Problem)

- 一般のＪＳＳＰ
  - ＮＰ完全問題

機械の順は任意

	1	2	3	4
J1	M1,3	M2,2	M3,4	M4,1
J2	M2,2	M4,2	M3,1	M1,3
J3	M1,2	M3,2	M2,1	M4,2

ジョブショップ・スケジューリング

Example:

- m**台の**machines, **n個の**jobs
- m**機械の仕事列**：$(n!)^m$

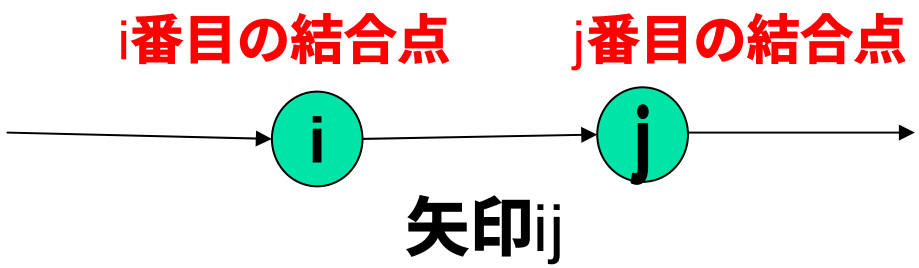
機械の順は任意

- **例**：n=5, m=5**でも**$(5!)^5$=250**億通り**

	1	2	3	4
J1	M1,3	M2,2	M3,4	M4,1
J2	M2,2	M4,2	M3,1	M1,3
J3	M1,2	M3,2	M2,1	M4,2

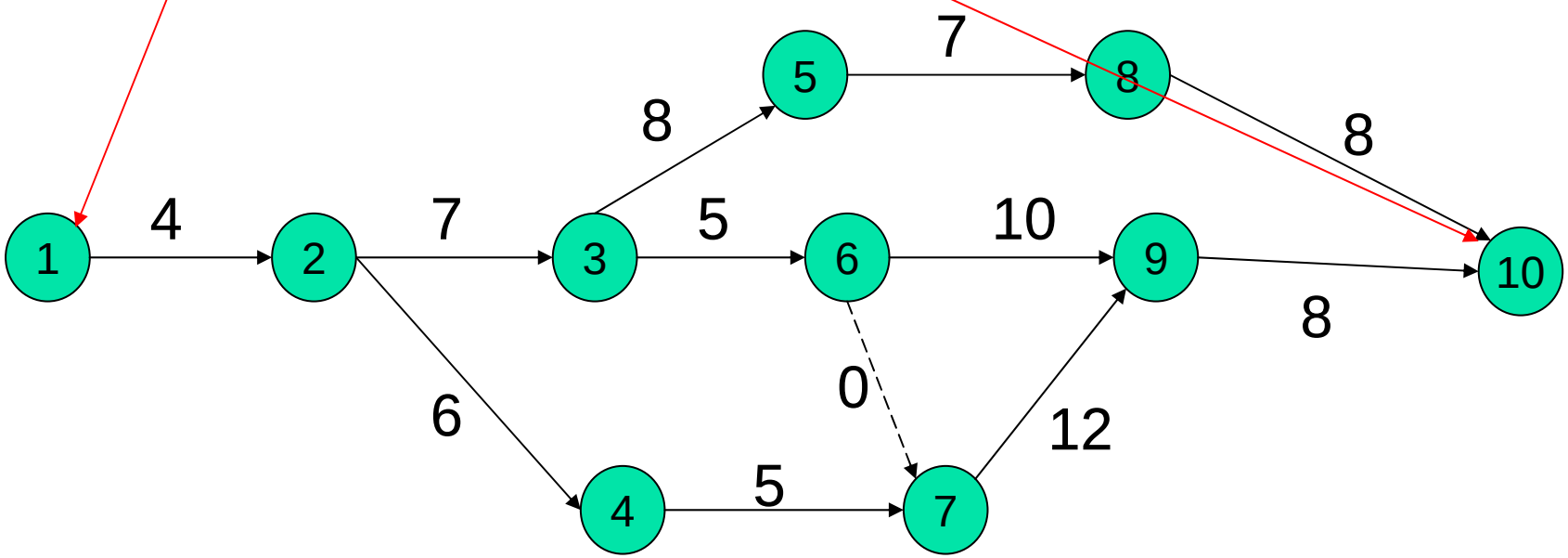
PERT

- Program Evaluation and Review Technique
  - ネットワーク(network)
  - アローダイヤグラム
  - 矢線(アクティビティ、activity)
  - 結合点 (イベント、event またはノード、node)



アローダイヤグラム

- 作業ネットワーク
- 開始点と終了点



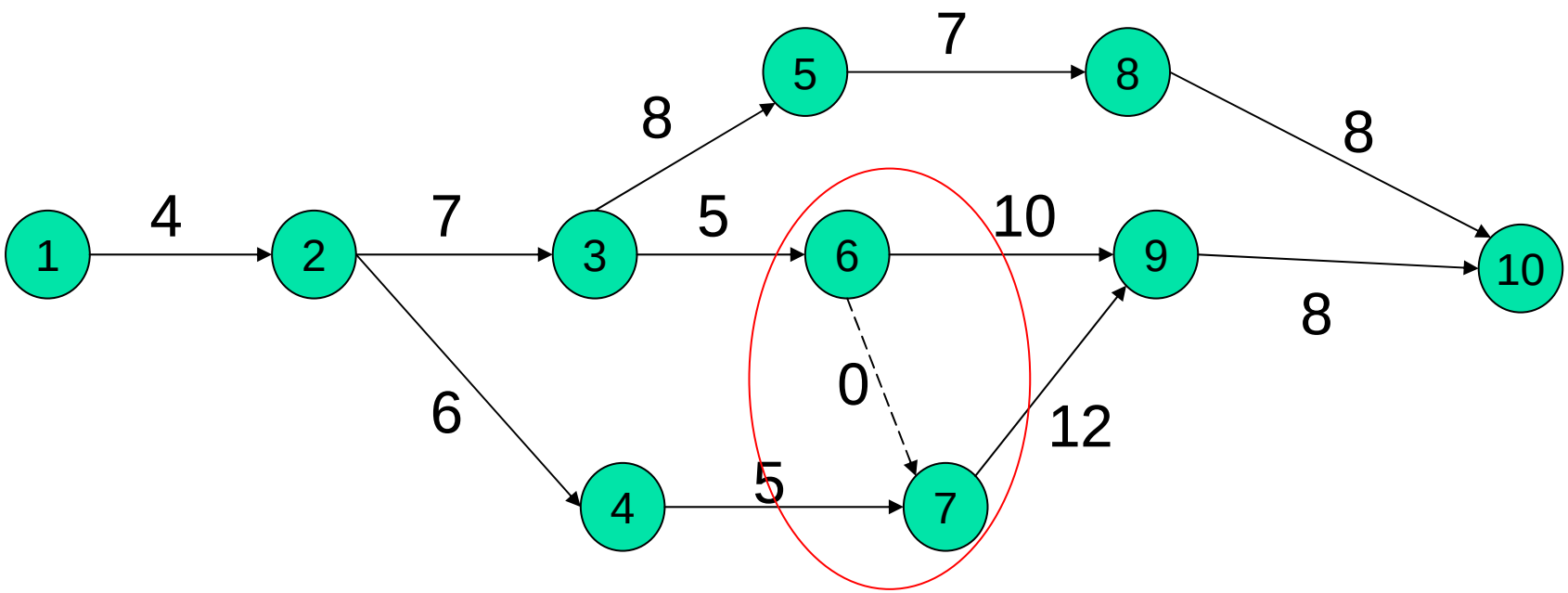
作業ネットワーク(activity network)

- ある結合点に流入する矢線で示される作業が全て完了していなければ、その結合点から出発する矢線の作業を開始することは出来ない。

- それぞれの結合点に記入する番号は１つであり、矢線の尾が接する結合点の番号に対して、矢線の頭が接する結合点の番号が大きくなるように番号付けを行う。
  - トポロジカル・ソート

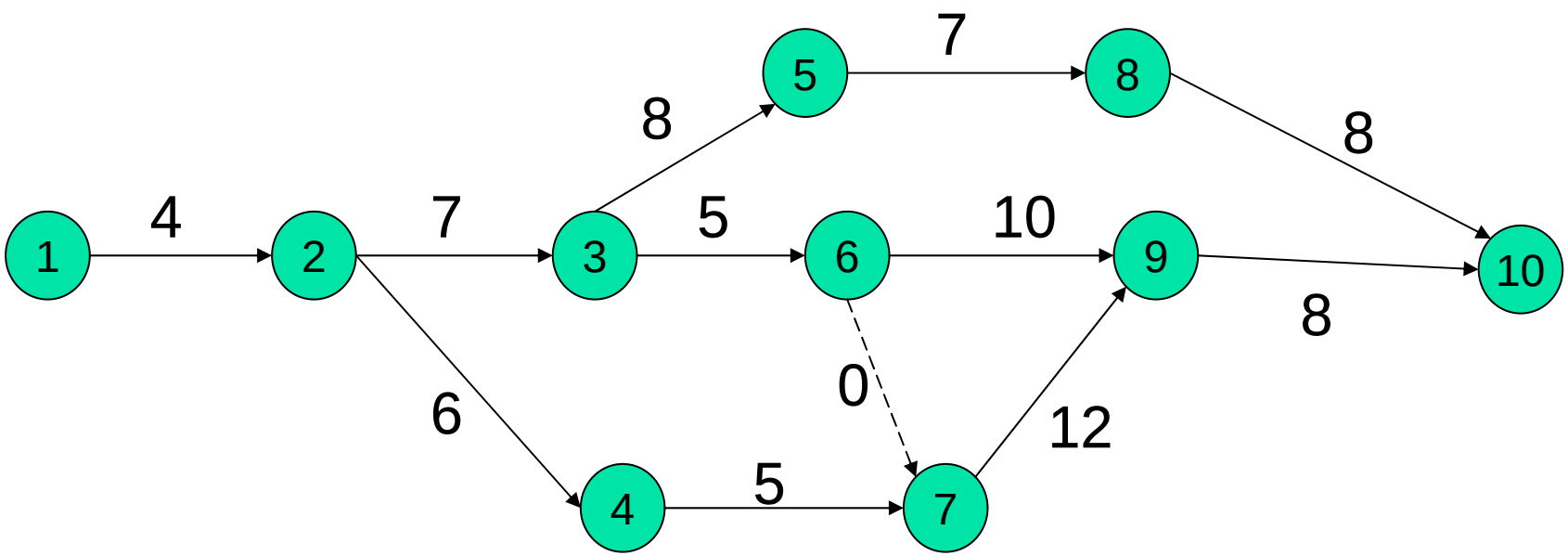
ダミー作業

- 疑似作業(dummy activity)
- 作業（7，9）は作業（3，6）が終了しなければ開始できない



クリティカル・パス

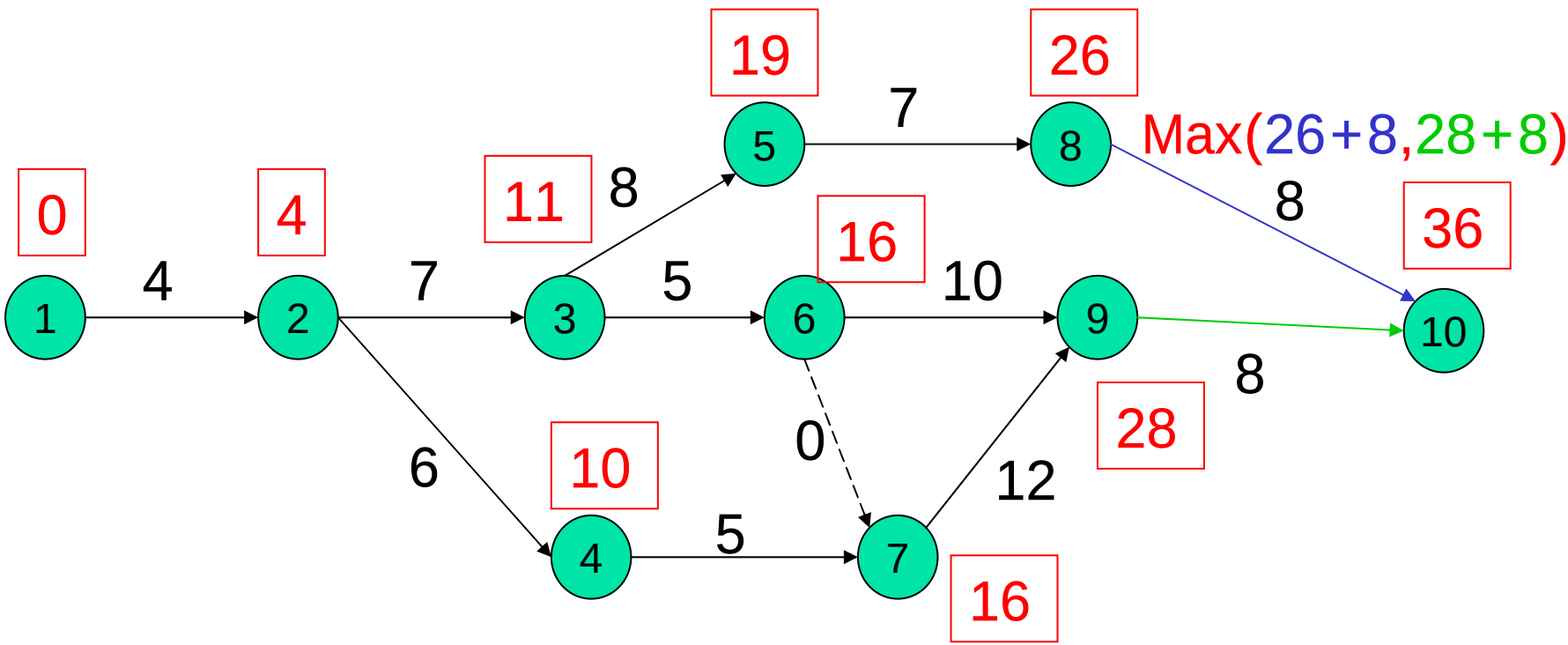
- パス＝すべての作業の経路（開始点から終了点まで）
- クリティカル・パス＝最も作業日数を要する経路



クリティカル･パスを求める

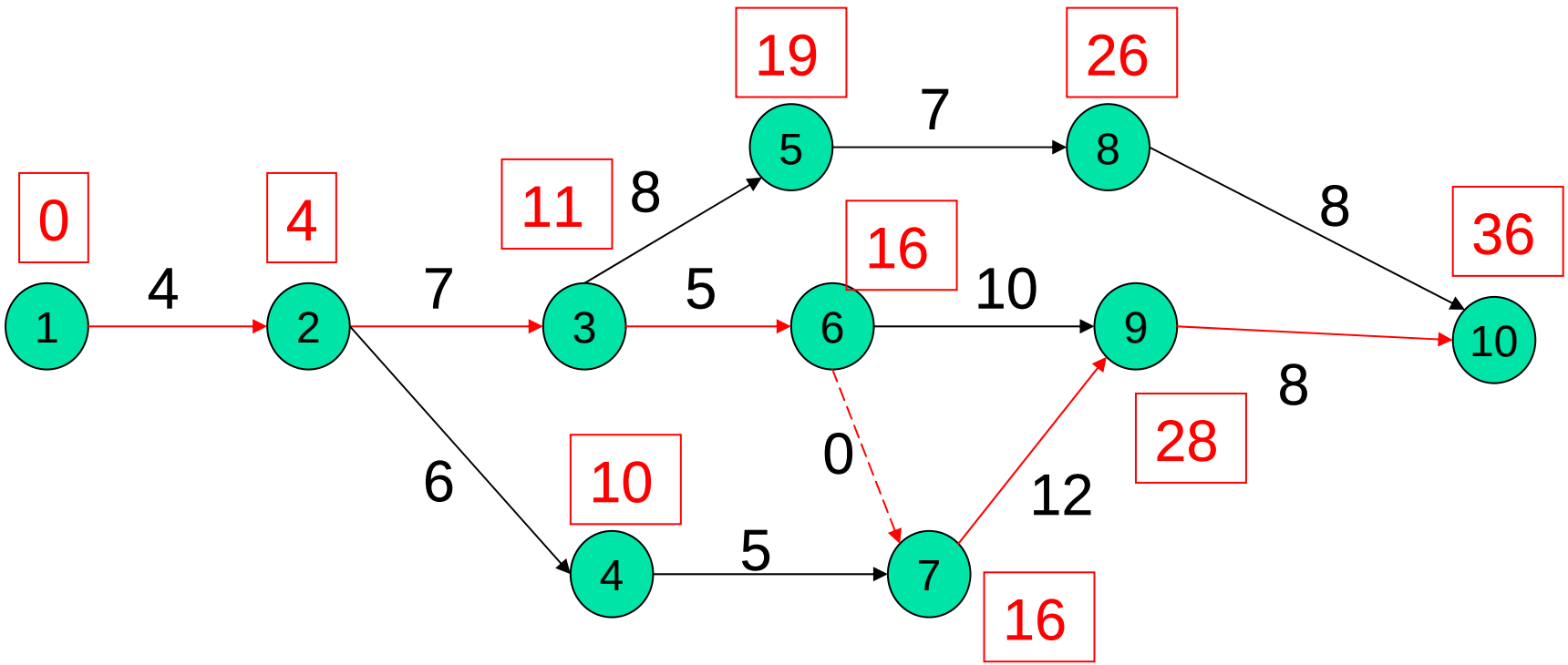
- 作業開始可能時間を計算する

そこまでの作業工程が複数であった場合には、作業日数の大きい方の日数で表示



クリティカル・パス

- それぞれの経路のうち最も作業時間を要するもの
- クリティカルパスの作業を短縮しない限り、他をいくら短縮しても全体の作業時間を短縮できない



クリティカル・パス以外のパス

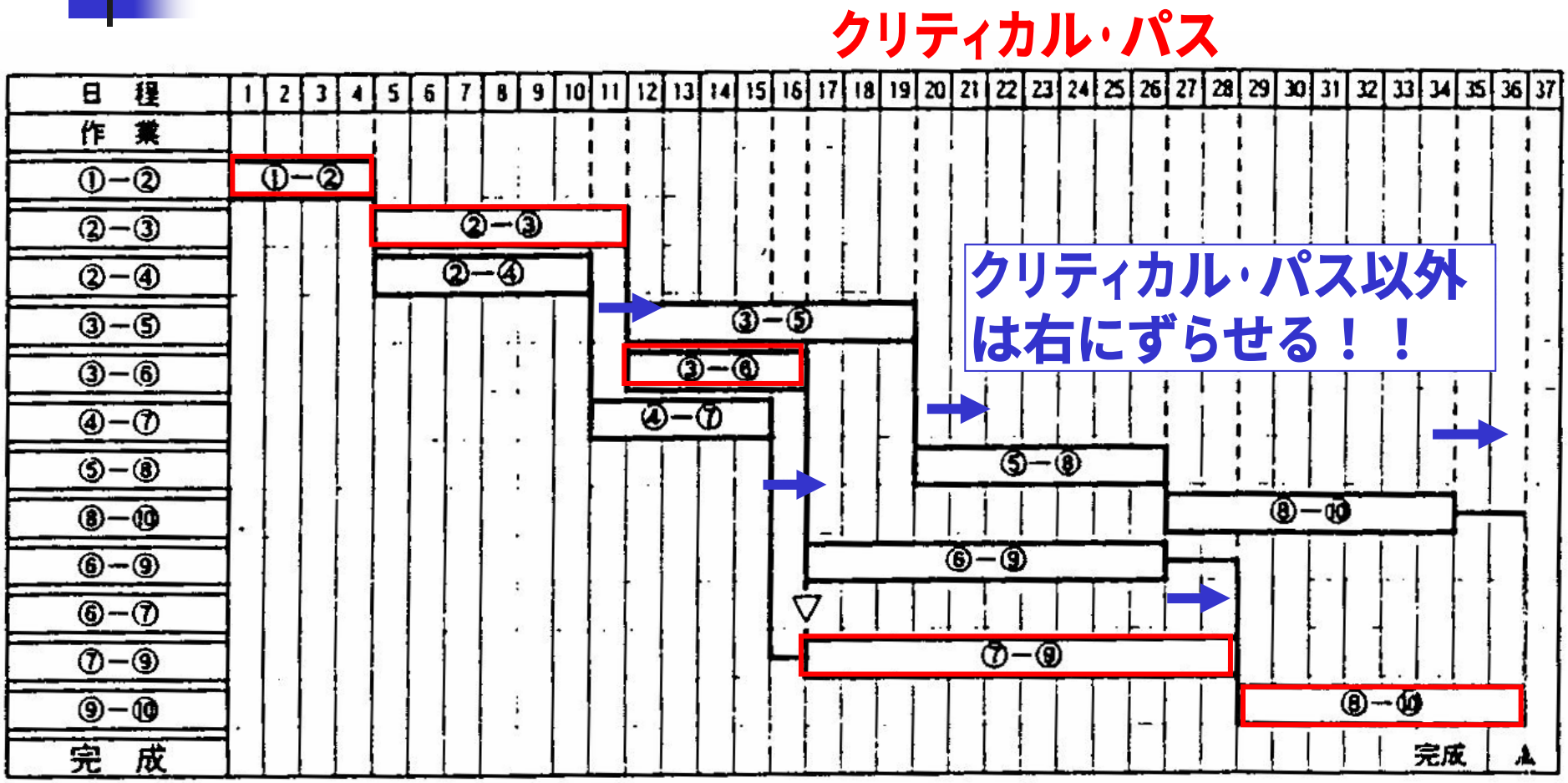


図 9.5　図 9.3 の作業のガントチャートによる表示

クリティカル･パスの計算方法

- **最早結合点時刻**(earliest node time)

$$(T_E)_i = \max[(T_E)_k + t_{ki}] \quad (i = 1,2,\cdots\cdots,n)$$

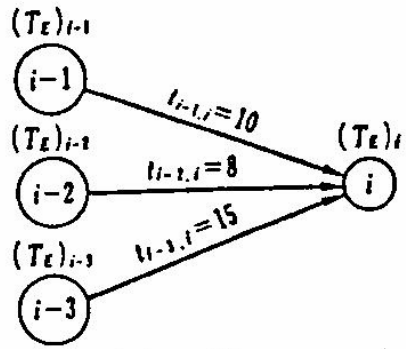


図 9･12

- **最遅結合点時刻**(latest node time)

$$(T_L)_i = \min[(T_L)_j - t_{ij}] \quad (i = 1,2,\cdots\cdots,n)$$

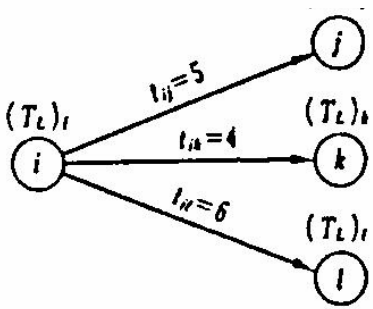


図 9･14

- **スラック (余裕)　イベントにおける日程上の余裕**

$$(SL)_i = (T_L)_i - (T_E)_i$$

クリティカル･パスの計算方法

- **最早開始時刻**(earliest start time)

  作業(i, j)を開始できる最も早い日程

  $ES_{ij} = (T_E)_i$

- **最早完了時刻**(earliest finish time)

  作業(i, j)を最も早く終了できる日程

  $EF_{ij} = ES_{ij} + t_{ij} = (T_E)_i + t_{ij}$

- **最遅開始時刻**(latest start time)

  プロジェクトの日程を遅らせないために作業(i, j)を遅くとも開始しなければならない限界日程

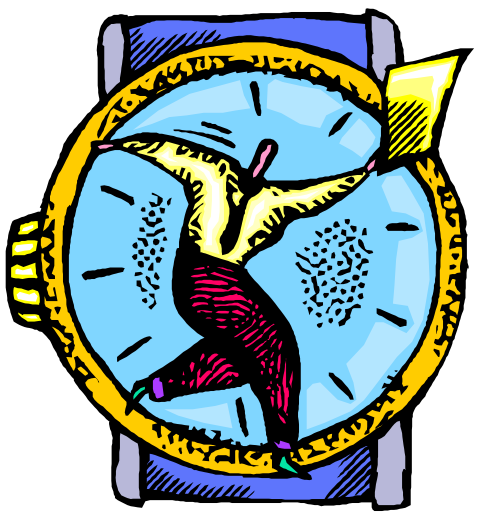
  $LS_{ij} = LF_{ij} - t_{ij} = (T_L)_i - t_{ij}$

クリティカル･パスの計算方法

- **最遅完了時刻**(latest finish time)

  プロジェクトの日程を 遅らせないで作業(i, j)を最も遅く終了できる 時刻

  $LF_{ij} = (T_L)_i$



クリティカル･パスの計算方法

- **全体余裕**

  プロジェクトの完成期日を遅らせない範囲で
  ある作業の開始を最大どれだけ遅らせることが出来るか

  $$TF_{ij} = LS_{ij} - ES_{ij} = LF_{ij} - EF_{ij} = (T_L)_j - (T_E)_i - t_{ij}$$

- **自由余裕**

  作業全体をクリティカルな状態にしたときにも、
  なおかつ、ある作業の開始を遅らせることの出来る日数

  $$FF_{ij} = (T_E)_j - (T_E)_i - t_{ij} = (T_E)_j - EF_{ij}$$

  $$FF_{ij} = (T_E)_j - (T_L)_i - t_{ij}$$

クリティカル･パスの計算方法

一般には　$(T_L)_j - (T_E)_i \geq t_{ij}$

等号（＝）の場合をクリティカルな作業という

例題をやってみよう

問題 9-5　図9·18はPERTネットワークである．最早結合点$(T_E)_i$，最遅結合点$(T_L)_j$を計算し，クリティカルパスCPを求めよ．

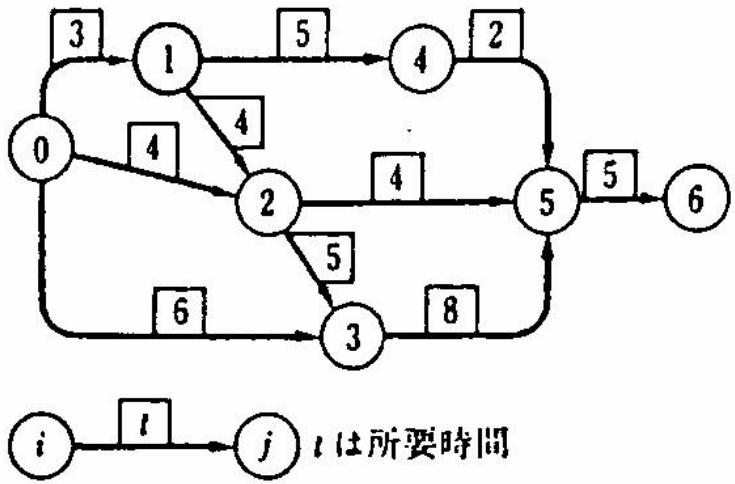


図 9·18　PERT ネットワーク

例題をやってみよう

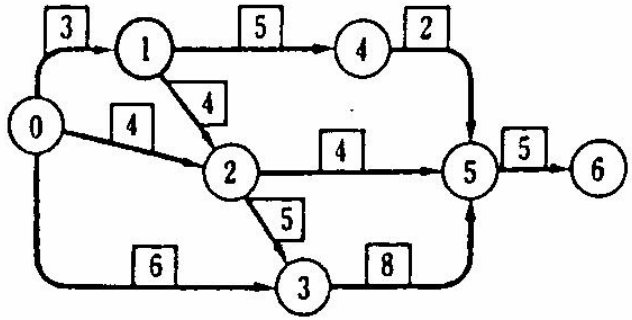


表 9·2　$(T_E)_i$, $(T_L)_j$ の計算表

$(T_L)_j$	0	3	7	12	18	20	25		
j	0	1	2	3	4	5	6	i	$(T_E)_i$
		3	4	6				0	0
			4		5			1	3
				5		4		2	7
						8		3	12
						2		4	8
							5	5	20
								6	25

max(4,3+4)

max(6,7+5)

max(8+2,7+4,
12+8)

例題をやってみよう (2)

問題 9-10　図 9·28 のネットワークについて

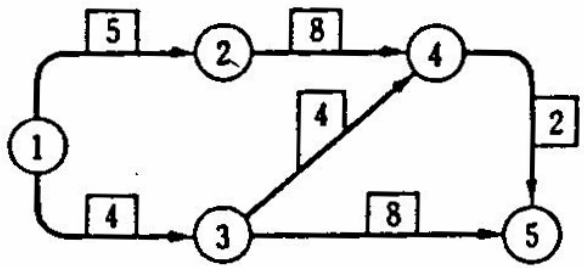


図 9·28　ネットワーク

（1）　$(T_E)_i$, $(T_L)_i$, $(ES)_{ij}$, $(EF)_{ij}$, $(LS)_{ij}$, $(LF)_{ij}$, $(TF)_{ij}$, $(FF)_{ij}$ を求めよ．ただし，$(FF)_{ij}=(T_E)_j-(T_L)_i-t_{ij}$ とする．

（2）　ガントチャートを書き，チャートの上で全余裕 (TF) と自由余裕 (FF) を明らかにせよ．

例題をやってみよう (2)

表 9·11

アクティビティ (i, j)	日　数 t	最早開始 ES	最早完了 EF	最遅開始 LS	最遅完了 LF	全 余 裕 TF	自由余裕 FF
1, 2	5	0	5	0	5	0	0
1, 3	4	0	4	3	7	3	0
2, 4	8	5	13	5	13	0	0
3, 4	4	4	8	9	13	5	2
3, 5	8	4	12	7	15	3	0
4, 5	2	13	15	13	15	0	0

CP:①→②→④→⑤

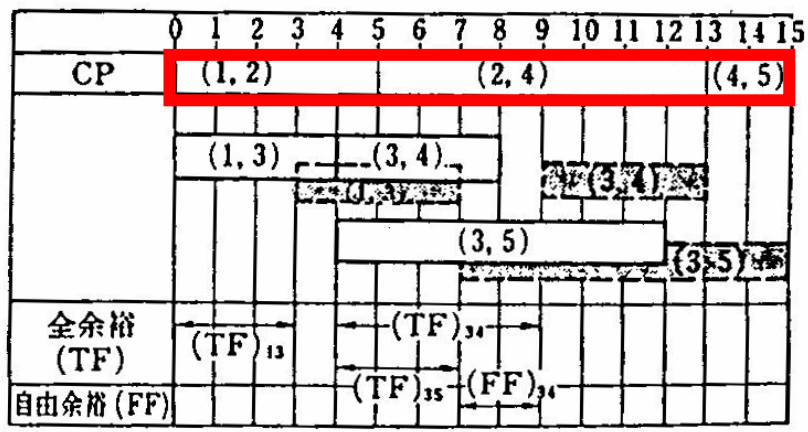


図 9·29　ガントチャートと余裕

3点時間見積り法

日程は計画通りに進行するとは限らない

作業時間を $T_{\min}$

普通の進行の場合の作 業時間を T_0

最も遅れた場合の作業 時間を $T_{\max}$として、

平均作業時間 T_{mean}は

$$T_{mean} = \frac{T_{\max} + 4T_0 + T_{\min}}{6}$$

3点時間見積り法

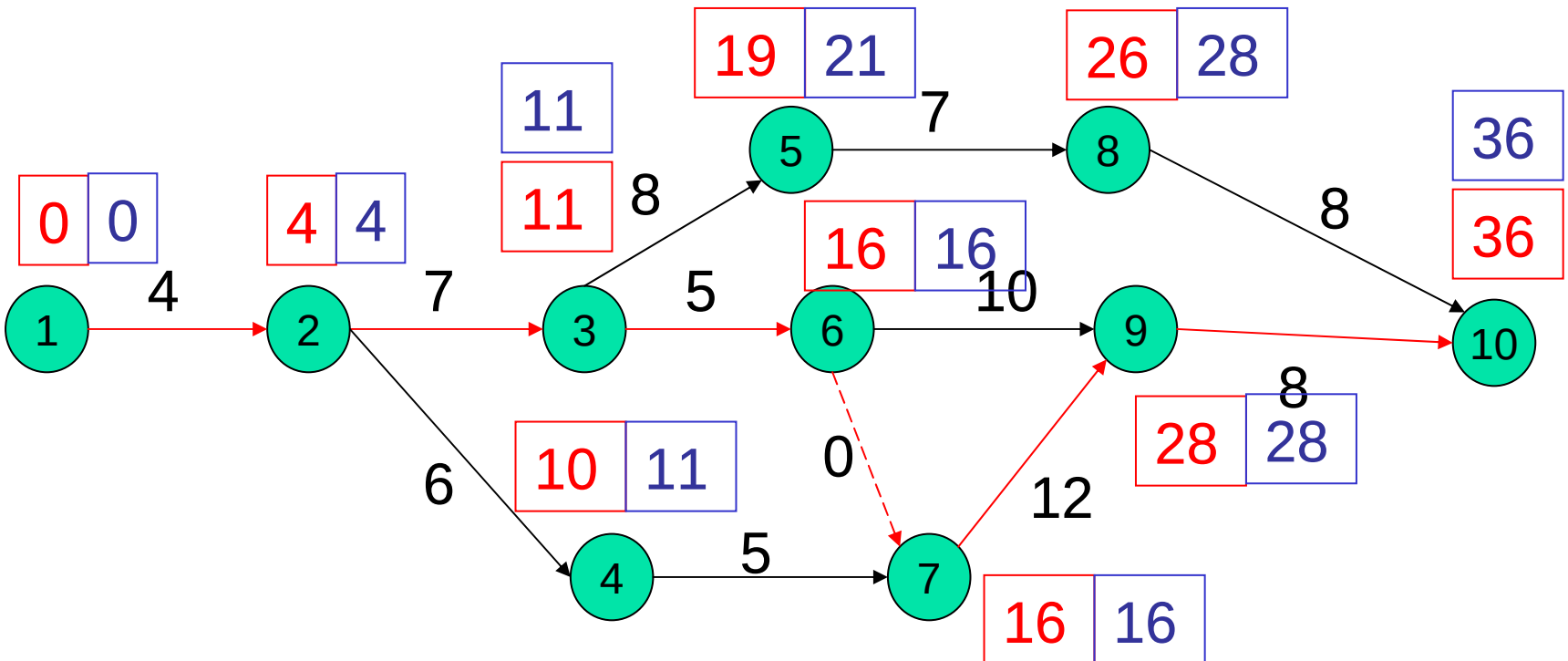
楽観値a,　　最可能値m,　悲観値bとすると

平均値　$E(t) = \dfrac{a + 4m + b}{6}$

分散　$V(t) = \left(\dfrac{b - a}{6} \right)^2$

クリティカル・パスと作業の余裕

- 結合点に2つの時間を記入
  - 最も早く作業が終了できる日付
  - 最も遅く終了しても工程上問題のない日付



クリティカル･パス以外のパス

- クリティカルパス以外の経路にある作業は、日程に余裕がある
- 記入されている数字の日付の範囲内であれば、作業の開始を遅らせたとしてもプロジェクト全体の工程に影響を与えることはない
- 日程の余裕は作業人員のピークを押さえ、加工機械および作業員の需要の平準化を行う場合に有効に利用できる

作業の平滑化

例

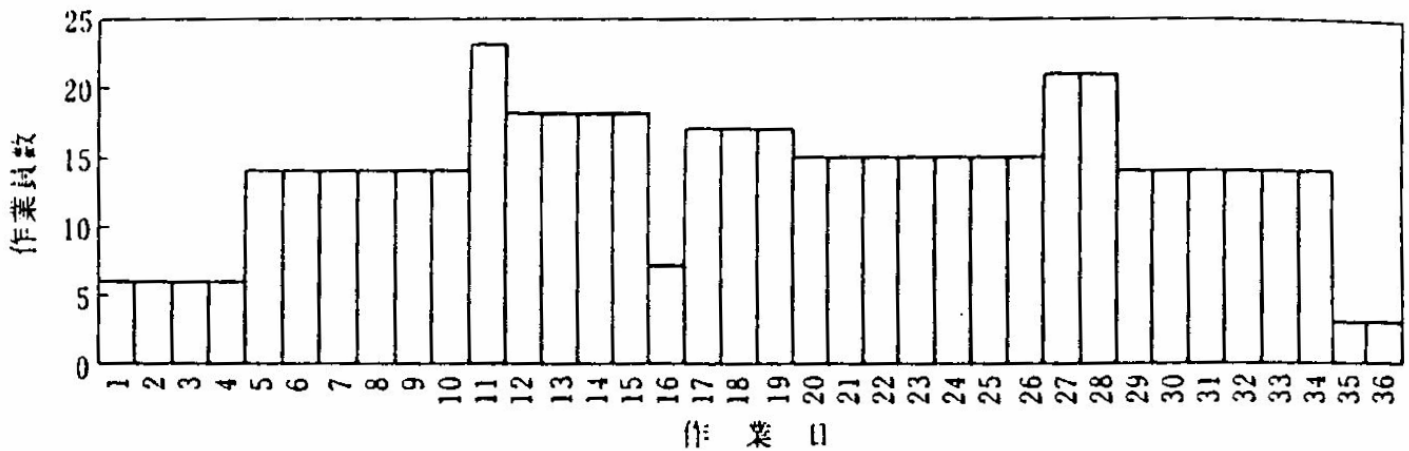
表 9.2（a） 作業日と作業員数

作業	作業日	所要日数	余裕日数	作業員数
①-②	1-4	4 日	0 日	6 人
②-③	5-11	7	0	12
②-④	5-10	6	1	2
③-⑤	12-19	8	2	4
③-⑥	12-16	5	0	3
④-⑦	11-15	5	1	11
⑤-⑧	20-26	7	2	2
⑥-⑨	17-26	10	2	3
⑦-⑨	17-28	12	0	10
⑧-⑩	27-34	8	2	11
⑨-⑩	29-36	8	0	3

作業の山積み表

作業日	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	延べ員数
作業 ①－②	6	6	6	6																																	24 人日
②－③					12	12	12	12	12	12	12																											84
②－④					2	2	2	2	2	2																												12
③－⑤												4	4	4	4	4	4	4	4																		32
③－⑥												3	3	3	3	3																					15
④－⑦											11	11	11	11	11																						55
⑤－⑧																				2	2	2	2	2	2	2											14
⑥－⑨																	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3											30
⑦－⑨																	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10									120
⑧－⑩																											11	11	11	11	11	11	11	11			88
⑨－⑩																													3	3	3	3	3	3	3	3	24
作業員数	6	6	6	6	14	14	14	14	14	14	23	18	18	18	18	7	17	17	17	15	15	15	15	15	15	15	21	21	14	14	14	14	14	14	3	3	498 人日

(a)　作業日程と作業員数（当初の日程）



(a)　作業員数の山積み表

作業の山積み表から分かること

- 11日目および27，28日目に23人および21人ずつ必要
- 27，28日目に行われる作業は作業④－⑦と作業⑦－⑨および作業⑧－⑩である
- そこで、作業④－⑦を1日遅く、作業⑤－⑩を2日遅く開始するように調整する。

作業の平滑化 (変更後)

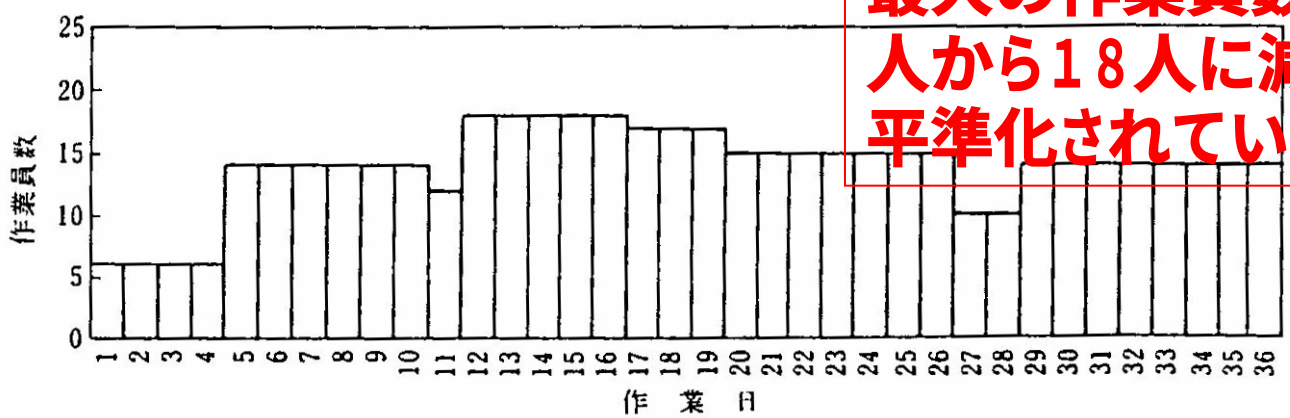
表 9.2（b） 作業日と作業員数（日程変更後）

作業	作業日	所要日数	余裕日数	作業員数
①-②	1-4	4日	0日	6人
②-③	5-11	7	0	12
②-④	5-10	6	1	2
③-⑤	12-19	8	2	4
③-⑥	12-16	5	0	3
④-⑦	12-16	5	0	11
⑤-⑧	20-26	7	2	2
⑥-⑨	17-26	10	2	3
⑦-⑨	17-28	12	0	10
⑧-⑩	29-36	8	0	11
⑨-⑩	29-36	8	0	3

作業の山積み表（日程変更後）

作業	作業日	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	延べ員数
	①－②	6	6	6	6																																		24 人日
	②－③					12	12	12	12	12	12	12																											84
	②－④					2	2	2	2	2	2																													12
	③－⑤												4	4	4	4	4	4	4	4																			32
	③－⑥												3	3	3	3	3																						15
	④－⑦											0	11	11	11	11	11																							55
	⑤－⑧																				2	2	2	2	2	2	2												14
	⑥－⑨																	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3											30
	⑦－⑨																	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10									120
	⑧－⑩																											0	0	11	11	11	11	11	11	11	11	88
	⑨－⑩																													3	3	3	3	3	3	3	3	24
	作業員数	6	6	6	6	14	14	14	14	14	14	12	18	18	18	18	18	17	17	17	15	15	15	15	15	15	15	10	10	14	14	14	14	14	14	14	14	498 人日

(b)　作業日程と作業員数（日程変更後）



(b)　作業員数の山積み表（日程変更後）

最大の作業員数が、２３人から１８人に減少して、平準化されている!!

稼働率

- ピーク時の作業員数を常時確保しておかなければならない

- (a)の稼働率＝58.94%
- (b)の稼働率＝75.31%に向上

CPM (critical path method)

- 費用の最も少なくなる日程計画
- コストを考慮
- 作業時間を短縮するほど作業にかかる費用は増加
- 作業時間の短縮と作業費用の増加を考慮して、その最適値を求める

CPM (critical path method)

- 限界短縮作業時間
  - クラッシュ、crash
  - これ以上は短縮できないという作業時間の限界
- 費用勾配(cost slope)

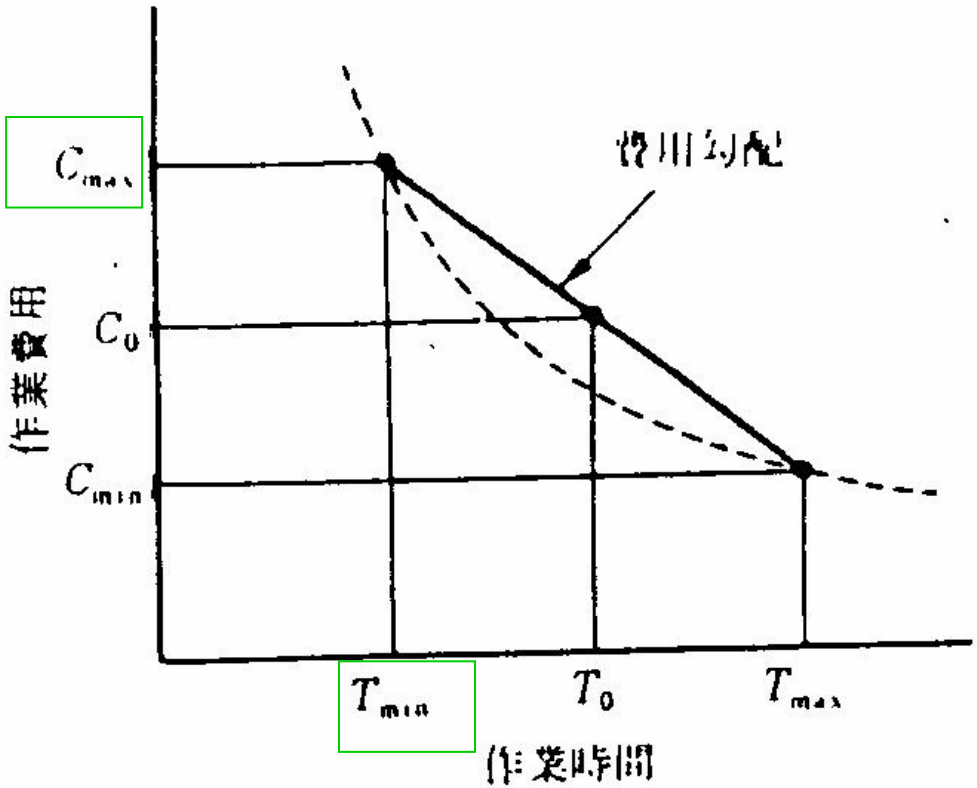
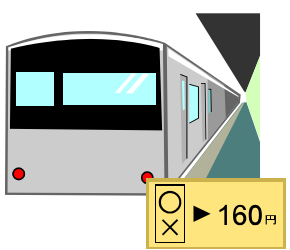
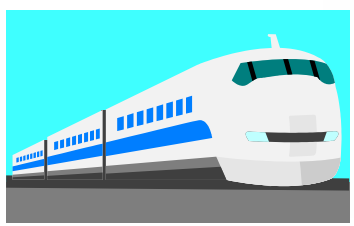


図 9.9　作業の費用と時間の関係



VS



費用勾配(cost slope)

$$C_0 = \frac{C_{\max} - C_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}} T_0 - \frac{T_{\max} C_{\max} - T_{\min} C_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}} = AT_0 - K$$

$$A = \frac{C_{\max} - C_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}},$$

$$K = \frac{T_{\max} C_{\max} - T_{\min} C_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}}$$

A ：費用勾配

$T_{\max}$ ：標準作業時間

$T_{\min}$ ：特急作業時間

$C_{\min}$ ：標準作業費用

$C_{\max}$ ：特急作業費用

例題を見てみる

③－⑥と②－④は工程の限界

表 9.3　短縮時間の限界と費用勾配

	作業	標準作業 時間	標準作業 費用	特急作業 時間	特急作業 費用	費用勾配 円/日
1	①-②	4 日	15000 円	3 日	18000 円	3000
2	②-③	7	32000	5	39400	3700
3	③-⑤	8	36000	6	45000	4500
4	⑤-⑧	7	28000	4	39400	3800
5	⑧-⑩	8	25000	5	40000	5000
6	③-⑥	5	19200	5	19200	－
7	⑥-⑦	0	0	0	0	－
8	⑥-⑨	10	29600	8	36200	3300
9	⑨-⑩	8	21000	6	38000	8500
10	②-④	6	9500	6	9500	－
11	④-⑦	5	26000	4	29600	3600
12	⑦-⑨	12	35600	10	48600	6500
	工期	36	276900	29	362900	

⑥－⑦の工程はダミー

作業日数と費用 (短縮0日)

表 9.4 (a) 作業工程の 作業日数と費用 (短縮 0日)

作業工程		①-②	②-③	②-④	③-⑤	③-⑥	④-⑦	⑥-⑦	⑤-⑧	⑥-⑨	⑦-⑨	⑧-⑩	⑨-⑩	
標準費用	円	15000	32000	9500	36000	19200	26000	0	28000	29600	35600	25000	21000	
費用勾配	円/日	3000	3700	—	4500	—	3600	—	3800	3300	6500	5000	8500	
短縮	工程番号	作業日数						作業日数						工期
0日	1	4	7		8				7			8		34
	2	4	7			5				10			8	34
	3	4	7			5		0			12		8	36
	4	4		6			5				12		8	35
	費用	15000	32000	9500	36000	19200	26000	0	28000	29600	35600	25000	21000	費用総計 276900

critical path

費用勾配(cost slope)

$$C_{0=}C_{\min}+(T_{\max}-T_0)\times A$$

C_0　：各作業工程の費用

$C_{\min}$　：標準作業費用

$T_{\max}$　：標準作業時間

T_0　：短縮作業時間

A　　：費用勾配

C_0の値を各工程の和として右方向に加算すれば、
最右欄に記入されている費用の総計が求められる。

例題を見てみる

- 最も勾配が少ないのは、①－②の工程の\3000（円／日）であり、特急作業により4→3日の短縮が可能
- 費用は\15000から\18000に増加するが、全体の工期を1日短縮
- 費用の総計は\276900より\279900に増加

- すると、1日短縮したときの作業工程は次のようになる

作業日数と費用 (短縮１日)

表 9.4（b） 作業工程の 作業日数と費用（短縮 1 日）

短縮	工程番号	作業日数							作業日数					工期	
1日	1	3	7		8				7			8		33	
	2	3	7			5				10			8	33	
	3	3	7			5		0			12		8	35	
	4	3		6			5				12		8	34	費用総計
	費用	18000	32000	9500	36000	19200	26000	0	28000	29600	35600	25000	21000		279900

critical path

例題を見てみる

- 次にさらに一日の短縮を考える
- 最も時間のかかる工程は同じ工程番号3の35日である。
- ①ー②は限界短縮作業時間（3日）に達しているため、これ以上の短縮は出来ない
- ③ー⑥,⑥-⑦も限界短縮作業時間
- ②ー③，⑦ー⑨，⑨ー⑩の費用勾配を比較して最も少ない\3700（円／日）の②ー③を選択
- 費用の総計は\283600に増加している。

作業日数と費用 (短縮2日)

表 9.4（c） 作業工程の 作業日数と費用（短縮 2 日）

短縮	工程番号	作業日数	作業日数											工期	
2日	1	3	6		8				7			8		32	
	2	3	6			5				10			8	32	
	3	3	6			5		0			12		8	34	
	4	3		6			5				12		8	34	費用総計
	費用	18000	35700	9500	36000	19200	26000	0	28000	29600	35600	25000	21000		283600

critical path

例題を見てみる

- さらに一日の短縮を考える
- クリティカルパスは工程番号3と4が同じ34日であるため、両工程に共通の作業を短縮するのがいい
- 両工程に共通する作業は⑦ー⑨、⑨ー⑩
- このうち費用勾配が少なく\6500（円／日）の、⑦ー⑨を選択

作業日数と費用 (短縮3日)

表 9.4（d） 作業工程の作業日数と費用（短縮 3日）

短縮	工程番号	作業日数	作業日数											工期	
3日	1	3	6		8				7			8		32	
	2	3	6			5				10			8	32	
	3	3	6			5		0			11		8	33	
	4	3		6			5				11		8	33	費用総計
	費用	18000	35700	9500	36000	19200	26000	0	28000	29600	42100	25000	21000		290100

critical path

作業日数と費用 (短縮４日)

表 9.4（e） 作業工程の作業日数と費用（短縮 4 日）

短縮	工程番号	作業日数						作業日数						工期	
4日	1	3	6		8				7			8		32	
	2	3	6			5				10			8	32	
	3	3	6			5		0			10		8	32	
	4	3		6			5				10		8	32	費用総計
	費用	18000	35700	9500	36000	19200	26000	0	28000	29600	48600	25000	21000		296600

critical path

例題を見てみる

- さらに一日の短縮しよう
- すべての工程がクリティカルパスになっている
- すべての工程に共通する作業①－②はすでにクラッシュしている
- したがって、⑧－⑩と⑨－⑩のように同時に複数の作業を短縮しなくてはならない
  - 限度以上に工程を短縮すると費用は急激に増加する

作業日数と費用 (短縮5日)

表 9.4 (f) 作業工程の作業日数と費用 (短縮 5日)

短縮	工程番号	作業日数						作業日数						工期	
5日	1	3	6		8				7			7		31	
	2	3	6			5				10			7	31	
	3	3	6			5		0			10		7	31	
	4	3		6			5				10		7	31	費用総計
	費用	18000	35700	9500	36000	19200	26000	0	28000	29600	48600	30000	29500		310100

critical path

費用 vs. 短縮効果

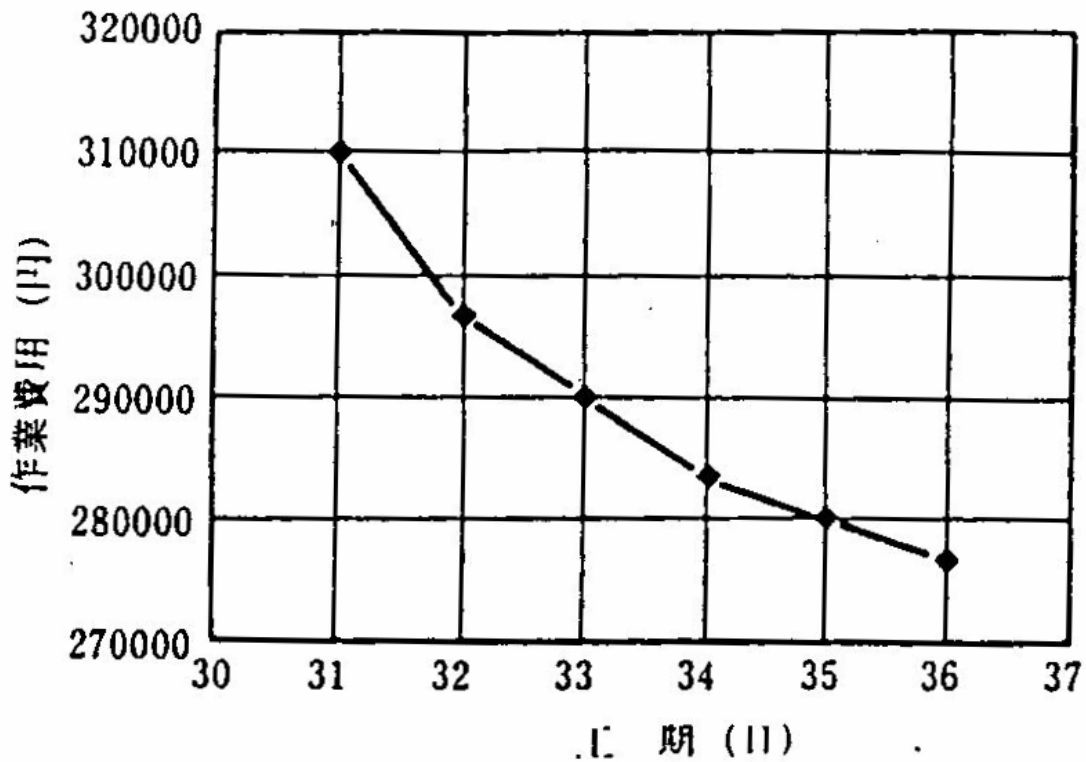


図 9.10　作業時間短縮による費用の増加

続「超」整理法・時間編

野口悠紀雄、中公新書

- 原則1：中断するな
  - 中断されない時間を確保する
- 原則2：その場でやれ
  - 現場主義と応急措置
- 原則3：すぐにやれ
  - １００％でなく
  - 拙速を旨とせよ
- 原則4：ときには寝かす
- 原則5：不確実なことからやれ